Истинно многочастичное рассеяние в осцилляторном представлении*

А. М. Широков[a], Ю. Ф. Смирнов[a,b], С. А. Зайцев[c]

[a]*НИИЯФ МГУ, Москва 119899, Ленинские горы*

[b]*Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México, México 04510, D.F., México*

[c]*Хабаровский государственный технический университет, Хабаровск 680035, ул. Тихоокеанская, 136*

Аннотация

Проведено обобщение теории рассеяния в осцилляторном представлении на случай истинно многочастичного рассеяния.

I. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе формулируется подход к теории многочастичного рассеяния в осцилляторном представлении (ОП). При этом мы ориентируемся на простейший случай, а именно на такой, когда волновая функция в асимптотической области имеет вид сферической волны в многомерном пространстве. Это соответствует приближению так называемого "истинно" многочастичного рассеяния (ИМР) [1,2], т. е. учету только таких состояний, когда в системе наблюдается "демократия" и ни одна пара или группа частиц не выделяется в смысле образования связанных состояний или рассеяния на энергетической поверхности.

---

*Посвящается светлой памяти Н. А. Свешникова.

Построение волновой функции ИМР входит как составная часть в задачу построения волновой функции системы многих тел [1]. Но исследование приближения ИМР имеет и самостоятельную физическую ценность, т. к. многие процессы распада легких ядер на несколько фрагментов хорошо описываются в этом приближении (см. обзоры [3,4]). Более того, приближение ИМР фактически перестает быть приближением и становится точной теорией для так называемых "демократических распадов" [4], т. е. трехчастичных распадов $A \to A_1 + A_2 + A_3$, в которых ни одна из бинарных подсистем (A_iA_j) не имеет связанных состояний, четырехчастичных распадов $A \to A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, в которых ни одна из бинарных (A_iA_j) и трехчастичных $(A_iA_jA_k)$ подсистем не имеет связанных состояний, и т. д. Демократические распады стали весьма актуальными в последнее время в ядерной физике в связи с началом систематического исследования с помощью радиоактивных пучков экзотических короткоживущих нейтронно-избыточных ядер, многие из которых при небольших энергиях возбуждения, представляющих на данный момент большой интерес, могут распадаться только по "демократическим каналам", например, $^{11}\mathrm{Li} \to {}^{9}\mathrm{Li}+n+n$, $^{6}\mathrm{He} \to {}^{4}\mathrm{He}+n+n$, $^{14}\mathrm{Be} \to {}^{12}\mathrm{Be}+n+n$ и др. Именно в рамках метода ИМР проводилось теоретическое исследование возбужденных состояний таких ядер в ряде недавно опубликованных работ, например, в работах [5–10]. В приближении ИМР активно исследуются и некоторые другие актуальные задачи, например, резонансы в системах трех и четырех нейтронов [11].

Кроме того, как будет показано ниже, в приближении ИМР можно рассчитать S-матрицу для многочастичной системы, и, вычисляя ее полюса, не только однозначно установить параметры резонансных состояний, но и уточнить энергию связи системы. Это уточнение оказывается существенным для слабосвязанных систем [8,10]. Можно ожидать, что в таком подходе к исследованию основного и других связанных состояний многочастичной системы приближение ИМР будет весьма точным.

Для вычисления характеристик ИМР естественно использовать (см. [2–4] и цитированные там работы) метод K-гармоник, связанный с разложением волновой функции системы по гиперсферическому базису. Для решения уравнений метода K-гармоник (в том числе и в области непрерывного спектра) предлагается использовать разложение волновой функции по собственным функциям $(3A-3)$-мерного (A — число частиц в системе) гармонического осциллятора в гиперсферических координатах ρ, Ω. В результате мы придем к исследованию уравнения Шредингера в гиперсферическом ОП. Это означает, что вместо решения системы связанных дифференциальных уравнений метода K-гармоник задача сведется к анализу бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Метод ОП [12–16] оказался очень продуктивным в теории рассеяния и реакций с бинарными каналами [17–21]. Наш подход является естественным обобщением этого метода на случай ИМР.

Частично результаты этой работы была опубликована нами в виде препринта [22] и использованы нами в конкретных расчетах ядерных систем [23,8,10]. На основе опыта этих расчетов мы можем утверждать о высокой эффективности предлагаемого подхода, которая может быть еще более увеличена при использовании аналитических результатов данной работы, не публиковавшихся ранее.

II. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА В ГИПЕРСФЕРИЧЕСКОМ ОСЦИЛЛЯТОРНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Волновую функцию системы из A частиц, характеризуемую полной энергией E и другими квантовыми числами, которые мы обозначим мультииндексом β, запишем в виде разложения (считаем, что движение центра масс уже отделено):

$$|E\beta\rangle = \sum_{nK\gamma} \langle nK\gamma|E\beta\rangle \, |nK\gamma\rangle \,, \tag{1}$$

где в качестве базисных функций $|nK\gamma\rangle$ выбраны собственные функции $(3A-3)$-мерного гармонического осциллятора с частотой $\hbar\omega$ в гиперсферических координатах:

$$|nK\gamma\rangle = \Phi_{nK}(\rho)\mathfrak{Y}_{K\gamma}(\Omega). \tag{2}$$

Здесь: K — гипермомент; γ — набор остальных квантовых чисел, характеризующих функции $\mathfrak{Y}_{K\gamma}(\Omega)$, которые в случае системы безспиновых частиц представляют собой гиперсферические гармоники $Y_{K\gamma}(\Omega)$ от угловых переменных Ω, а если учитываются спиновые и изоспиновые степени свободы частиц, то $\mathfrak{Y}_{K\gamma}(\Omega)$ представляют собой произведения (антисимметризованные или симметризованные комбинации таких произведений при наличии в системе тождественных фермионов или бозонов, соответственно) гиперсферических гармоник на спин-изоспиновые функции (γ в этом случае включает в себя также спин-изоспиновые квантовые числа); гиперрадиус $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{A}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R})^2}$, $\boldsymbol{r}_i$ — координата отдельной частицы, $\boldsymbol{R}$ — координата центра масс; n — главное квантовое число, характеризующее радиальную функцию

$$\Phi_{nK} \equiv \Phi_n^{\mathcal{L}}(\rho) = \rho^{-(3A-4)/2}\varphi_{nK}(\rho), \tag{3}$$

$$\varphi_{nK}(\rho) \equiv \varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho) = (-1)^n \sqrt{\frac{2\lambda n!}{\Gamma(n+\mathcal{L}+3/2)}}\,(\lambda\rho)^{\mathcal{L}+1}\mathrm{e}^{-\lambda^2\rho^2/2}L_n^{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(\lambda^2\rho^2), \tag{4}$$

где $\mathcal{L} = K + \dfrac{3A-6}{2}$, $L_n^{\alpha}(x)$ — присоединенный полином Лагерра [24], а $\lambda^{-1} = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ играет роль "радиуса осциллятора" и является свободным параметром, значение которого выбирается так, чтобы обеспечить достаточно быструю сходимость вычислительной схемы. Базис (2) ортонормирован:

$$\langle nK\gamma|\, n'K'\gamma'\rangle = \delta_{nn'}\delta_{\Gamma\Gamma'}, \tag{5}$$

т. е. $\int \varphi_{nK}^{*}(\rho)\varphi_{n'K}(\rho)\,\mathrm{d}\rho = \delta_{nn'}$ (символом Γ мы обозначаем совокупность квантовых чисел K, γ).

В случае системы двух частиц ($A = 2$) излагаемая ниже теория переходит в обычную теории двухчастичного рассеяния, которое является частным случаем ИМР. При этом $K = \mathcal{L} = L$, где L — орбитальный момент, гиперсферические функции $Y_{K\gamma}(\Omega)$ переходят в обычные сферические функции $Y_{Lm}(\vartheta, \varphi)$, а функции (3)–(4) — в радиальные функции трехмерного сферически-симметричного осциллятора. Индексы Γ играют ту же формальную роль, что и индексы, различающие различные каналы в теории двухчастичного рассеяния. Отметим, однако, что ниже мы интересуемся только случаем, когда пороговая энергия во всех "каналах" Γ одинакова. В двухчастичном случае это соответствует тому, что мы рассматриваем общую теорию рассеяния на нецентральном потенциале, смешивающем состояния с различными моментами L или, по крайней мере, с различными значениями проекции момента m и различными значениями проекции спина σ. Теория легко может быть обобщена и на общий случай, в котором учитываются и различные физические каналы, соответствующие различным возбуждениям внутренних степеней свободы рассматриваемых частиц, а, следовательно, и характеризуемых различными пороговыми энергиями. Такое обобщение может представлять интерес и для систем с $A \geqslant 3$.

Очевидно, что уравнение Шредингера в гиперсферическом ОП принимает вид:

$$\sum_{n' K' \gamma'} \langle nK\gamma | \, H - E \, | n'K'\gamma' \rangle \, \langle n'K'\gamma' | \, E\beta \rangle = 0. \tag{6}$$

Здесь $H = T + V$. Матрица кинетической энергии T диагональна по индексам Γ, Γ' и трехдиагональна по индексам n, n':

$$\begin{aligned} \langle nK\gamma | \, T \, | n'K'\gamma' \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \, \delta_{\Gamma\Gamma'} \, \Bigg[& - \sqrt{(n+1)\left(n + \mathcal{L} + \frac{3}{2}\right)} \, \delta_{n+1,n'} \\ & + \left(2n + \mathcal{L} + \frac{3}{2}\right) \delta_{nn'} - \sqrt{n \left(n + \mathcal{L} + \frac{1}{2}\right)} \, \delta_{n-1,n'} \Bigg]. \end{aligned} \tag{7}$$

В отличие от кинетической энергии, матричные элементы потенциальной энергии, которую мы представим в виде суммы потенциалов парного взаимодействия: $V = \sum\limits_{i<j} V(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$, не являются диагональными по индексам Γ, Γ' (за исключением случая $A = 2$ с центральными силами).

Одним из достоинств осцилляторного базиса в задаче ИМР является то, что в нем легко осуществляется переход от одного набора координат Якоби к другому — это существенно облегчает расчет матричных элементов потенциальной энергии [2,19,25]. Система (6) представляет собой бесконечный набор линейных алгебраических уравнений на коэффициенты $\langle nK\gamma | \, E\beta \rangle \equiv \langle n\Gamma | \, E\beta \rangle$ разложения (1). Дело, однако, упрощается тем, что при достаточно больших n матричные элементы потенциальной энергии $\langle n\Gamma | \, V \, | n'\Gamma' \rangle$ становятся малыми по сравнению с матричными элементами кинетической энергии $\langle n\Gamma | \, T \, | n'\Gamma' \rangle$ (последние, как видно из (7), линейно растут с ростом n при

$n \gg 1$). Поэтому при больших значениях n можно отбросить матричные элементы потенциальной энергии V, сохранив в области $n \gg 1$ матричные элементы кинетической энергии, т. е. можно положить

$$\langle n\Gamma|\, H \,|n'\Gamma'\rangle = \langle n\Gamma|\, T \,|n'\Gamma'\rangle\,, \qquad \text{если } n > n_\Gamma \text{ или } n' > n_{\Gamma'}. \tag{8}$$

Конкретные значения величин n_Γ в каждой парциальной волне Γ выбираются достаточно большими, такими, чтобы при их увеличении результаты расчетов основных характеристик системы не претерпевали существенных изменений.

В приближении (8) система уравнений (6) разбивается на две части: конечномерную "внутреннюю" область достаточно малых значений $n \leqslant n_\Gamma$ и бесконечную "внешнюю" или "асимптотическую" область с $n > n_\Gamma$, где учитываются лишь матричные элементы кинетической энергии и пренебрегается взаимодействием между частицами. Во внешней области в силу диагональности кинетической энергии по индексам Γ, Γ' уравнения на коэффициенты $\langle n\Gamma|\, E\beta\rangle$, отвечающие разным парциальным волнам Γ, разделяются, и их можно решать независимо друг от друга. В этой области коэффициенты $\langle n\Gamma|\, E\beta\rangle$ удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям (ТРС):

$$\sqrt{(n+1)\left(n+\mathcal{L}+\frac{1}{2}\right)}\,\langle n-1,\,\Gamma|\, E\beta\rangle \;-\; \left(2n+\mathcal{L}+\frac{3}{2}-q^2\right)\langle n\Gamma|\, E\beta\rangle \\ +\sqrt{n\left(n+\mathcal{L}+\frac{3}{2}\right)}\,\langle n+1,\,\Gamma|\, E\beta\rangle = 0. \tag{9}$$

Здесь $q = \varkappa/\lambda = \sqrt{2E/(\hbar\omega)}$. Соотношение (9) следует рассматривать как разностное уравнение второго порядка, которое имеет, вообще говоря, два линейно независимых решения. Однозначный выбор решения уравнения (9) достигается наложением соответствующих асимптотических условий в каждой парциальной волне $\Gamma = K, \gamma$. В хорошо изученном случае обычного потенциального рассеяния ($A = 2$) с центральным взаимодействием [12–16] матричные элементы гамильтониана диагональны по индексам Γ, Γ' (в этом случае K совпадает с сохраняющимся угловым моментом L) и решение в каждой парциальной волне может строиться независимо. Но в более общем случае ИМР

($A \geqslant 3$) матричные элементы гамильтониана H уже не диагональны по Γ, Γ'. Поэтому решения в разных парциальных волнах $\Gamma = K, \gamma$ во "внутренней" области оказываются связанными друг с другом. В результате проблема ИМР приобретает характер задачи на связанные каналы. Отметим, что в случае бесструктурных фрагментов задача ИМР лишь формально представляет собой задачу связанных каналов, т. к. всем рассматриваемым "каналам" соответствует один и тот же физический канал, ибо они отвечают одному и тому же физическому процессу. Тем не менее, мы будем говорить о парциальной волне $\Gamma = K, \gamma$ как о канале Γ и вводить в рассмотрение различные величины, используемые в теории многоканального рассеяния, например, S-матрицу, связывающую решения в различных каналах Γ, и т. п. Различные физические каналы также могут быть учтены в рамках нашего подхода.

III. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

III.A. Качественный анализ решений разностного уравнения (9)

Во "внешней" области (т. е. при $n > n_\Gamma$) коэффициенты $\langle n\Gamma|\, E\beta\rangle$ разложения (1) в каждом канале Γ удовлетворяют разностному уравнению второго порядка (9). В этой области пренебрегается взаимодействием между частицами, т. е. (9) представляет собой свободное уравнение Шредингера в гиперсферическом ОП. Для него могут быть найдены точные решения. Однако прежде, чем получить их в явном виде, обсудим качественный характер ожидаемых решений. Для этого аппроксимируем разностное уравнение (9) дифференциальным уравнением второго прядка. Метод аппроксимации разностных уравнений второго порядка дифференциальными развивался нами в работах [26,27], где получены все необходимые соотношения, исследована их точность, границы применимости и т. п. Обоснование использованного ниже подхода можно найти в указанных работах. Отметим, что в данном разделе мы интересуемся только качественным анализом решений уравнения (9), а поэтому используем простейший вариант аппроксимации разностного уравнения (9) дифференциальным, не учитываем влияние дополнительного потенциала (см. [27]) и ограничиваемся учетом членов сравнительно невысокого порядка малости. При необходимости полученные ниже соотношения могут быть легко уточнены методами, изложенными в [27].

Введем величину $z = 2\sqrt{n + \frac{\mathcal{L}}{2} + \frac{3}{4}}$, которую мы будем рассматривать как непрерывную переменную. Вместо коэффициентов разложения (1) используем функцию $\chi(z) = z^{\frac{1}{2}} \langle n\Gamma|\, E\beta\rangle$. Разлагая левую часть уравнения (9) в ряд по степеням $\frac{1}{z}$ и оставляя только члены до второго порядка по $\frac{1}{z}$ включительно, приходим к дифференциальному уравнению

$$\chi'' - \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}+1)}{z^2} + q^2\chi = 0, \tag{10}$$

которое достаточно точно аппроксимирует ТРС (9) в области $z \gg 1$.

Решения одномерного уравнения Шредингера (10) с центробежным потенциалом, отвечающим “моменту” $\mathcal{L}$ (напомним, что при четном числе частиц A “момент” $\mathcal{L}$ — целый, а при нечетном A “момент” $\mathcal{L}$ — полуцелый), выражаются через линейную комбинацию функций Бесселя $J_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(qz)$ и Неймана $N_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(qz)$, которые мы определяем в соответствии с [28]. В результате устанавливаем, что коэффициенты разложения (1) имеют следующее асимптотическое поведение в области $n \gg 1$:

$$\begin{aligned} \langle n\Gamma|\, E\beta\rangle \; &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha\,\sqrt{qz}\,J_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(qz) + \beta\,\sqrt{qz}\,N_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(qz) \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\alpha\sin\left(qz - \frac{\pi\mathcal{L}}{2}\right) - \beta\cos\left(qz - \frac{\pi\mathcal{L}}{2}\right)\right], \end{aligned} \tag{11}$$

где α и β — константы, не зависящие от n. Численные значения констант α и β определяются поведением функции $\langle n\Gamma|\, E\beta\rangle$ при малых n, где уже нельзя использовать асимптотическое уравнение (9) и следует учитывать потенциальную энергию взаимодействия частиц (см. ниже раздел IV).

Квазиклассические соображения работы [14] показывают, что при больших значениях n осцилляторные базисные функции ведут себя как δ-функции в классической точке поворота $\rho_{\text{пов}} = z/\lambda$ (см. подробнее Приложение А), и приводят нас к тому, что (см. выражение (П.А.2) в Приложении А)

$$\langle n\Gamma |\, E\beta\rangle \sim \Psi^{\mathcal{L}}_{E\beta}(z/\lambda), \tag{12}$$

где $\Psi^{\mathcal{L}}_{E\beta}(\rho)$ — волновая функция системы в координатном представлении. Отсюда следует, что в координатном пространстве набору величин $\langle n\Gamma |\, E\beta\rangle$ с асимптотикой (11) соответствуют радиальные волновые функции с асимптотикой вида

$$\begin{aligned}\Psi^{\mathcal{L}}_{E\beta}(\rho) = \sum_n \langle n\Gamma |\, E\beta\rangle\, \varphi^{\mathcal{L}}_n(\rho) \ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} G\sqrt{\varkappa\rho}\left[\alpha J_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(\varkappa\rho) + \beta N_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(\varkappa\rho)\right] \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} G\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\left[\alpha\sin\!\left(\varkappa\rho - \frac{\pi\mathcal{L}}{2}\right) - \beta\cos\!\left(\varkappa\rho - \frac{\pi\mathcal{L}}{2}\right)\right],\end{aligned} \tag{13}$$

где G — нормировочная константа, $\varkappa = q\lambda$ — волновое число. Таким образом, величина $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\alpha}$ имеет смысл фазы ИМР в данной парциальной волне Г. Если один из коэффициентов α или β является мнимым, то (13) соответствует сходящимся или расходящимся сферическим волнам в парциальной волне Г. Из (11)–(13) видно, что если мы хотим получить решение ТРС (9), приводящее к асимптотике $\sqrt{\varkappa\rho}\, J_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(\varkappa\rho)$ для координатной волновой функции, то нужно требовать, чтобы $\langle n\Gamma \mid E\beta\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{qz}\, J_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(qz)$, а решение с координатной асимптотикой $\sqrt{\varkappa\rho}\, N_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(\varkappa\rho)$ получается, если ТРС (9) дополнить асимптотическим условием $\langle n\Gamma \mid E\beta\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{qz}\, N_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(qz)$. К получению явного вида решений ТРС (9) с такой асимптотикой (а также типа сходящихся и расходящихся сферических волн $\sqrt{\varkappa\rho}\, H^{(1,2)}_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(qz)$, где $H^{(1,2)}_{\nu}(z)$ — функции Ганкеля [24,28]) мы и переходим.

III.Б. Фундаментальные системы решений свободного уравнения Шредингера в гиперсферическом осцилляторном представлении

Рассмотрим величины $S^{\mathcal{L}}_n(q)$, $C^{\mathcal{L}}_n(q)$ и $C^{\mathcal{L}(\pm)}_n(q)$, определяемые выражениями:

$$S^{\mathcal{L}}_n(q) = \sqrt{\frac{2n!}{\lambda\Gamma(n+\mathcal{L}+3/2)}}\; q^{\mathcal{L}+1}\mathrm{e}^{-q^2/2} L^{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}_n(q^2), \tag{14}$$

$$C_n^{\mathcal{L}}(q) = -\frac{2q}{\pi S_0^{\mathcal{L}}(q)} \; \mathcal{P}\int\limits_0^\infty \frac{S_0^{\mathcal{L}}(q')S_n^{\mathcal{L}}(q')}{q^2 - {q'}^2}\,\mathrm{d}q', \tag{15}$$

$$C_n^{\mathcal{L}(+)}(q) = -\frac{2q}{\pi S_0^{\mathcal{L}}(q)} \int\limits_0^\infty \frac{S_0^{\mathcal{L}}(q')S_n^{\mathcal{L}}(q')}{q^2 - {q'}^2 + \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}q', \tag{16}$$

$$C_n^{\mathcal{L}(-)}(q) = -\frac{2q}{\pi S_0^{\mathcal{L}}(q)} \int\limits_0^\infty \frac{S_0^{\mathcal{L}}(q')S_n^{\mathcal{L}}(q')}{q^2 - {q'}^2 - \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}q', \tag{17}$$

В выражениях (16)–(17) добавка $\pm\mathrm{i}\varepsilon$ указывает направление обхода полюсов; $\mathcal{P}$ означает, что интеграл следует вычислять в смысле главного значения. Покажем, что $S_n^{\mathcal{L}}(q)$, $C_n^{\mathcal{L}}(q)$ и $C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)$ являются решениями разностного уравнения (9).

Тот факт, что $S_n^{\mathcal{L}}(q)$ удовлетворяет (9), непосредственно следует из рекуррентного соотношения для полиномов Лагерра [24]. Используя это, прямой подстановкой (15)–(17) в (9) убеждаемся в том, что ${}^{\mathcal{L}}_{n}(q)$, $C_n^{\mathcal{L}(+)}(q)$ и $C_n^{\mathcal{L}(-)}(q)$ также удовлетворяют (9) при $n > 0$, а точнее, неоднородному разностному уравнению второго порядка

$$\sqrt{(n+1)\left(n+\mathcal{L}+\frac{1}{2}\right)}\;A_{n-1}^{\mathcal{L}} - \left(2n+\mathcal{L}+\frac{3}{2}-q^2\right)A_n^{\mathcal{L}} \;+\; \sqrt{n\left(n+\mathcal{L}+\frac{3}{2}\right)}\;A_{n+1}^{\mathcal{L}} = -\frac{2q}{\lambda\pi S_0^{\mathcal{L}}(q)}\,\delta_{n0}\,, \tag{18}$$

где $n \geqslant 0$, а $A_n^{\mathcal{L}}$ можно заменить на ${}^{\mathcal{L}}_{n}(q)$, $C_n^{\mathcal{L}(+)}(q)$ или $C_n^{\mathcal{L}(-)}(q)$.

С помощью формулы Сохоцкого

$$\frac{1}{x \pm \mathrm{i}\,\varepsilon} = \mp\mathrm{i}\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x} \tag{19}$$

получаем связь решений (15)–(17) друг с другом:

$$C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q) \;=\; C_n^{\mathcal{L}}(q) \;\pm\; \mathrm{i}\,S_n^{\mathcal{L}}(q), \tag{20}$$

или

$$C_n^{\mathcal{L}}(q) = \frac{1}{2}\left(C_n^{\mathcal{L}(+)}(q) \;+\; C_n^{\mathcal{L}(-)}(q)\right). \tag{21}$$

Любая пара решений (14)–(17) уравнения (9) является линейно независимой и образует фундаментальную систему решений. Чтобы убедиться в этом, следует вычислить, так называемый, определитель Казоратти [29], играющий в теории разностных уравнений роль вронскиана, и показать, что он не обращается тождественно в нуль при любых n. Определитель Казоратти двух решений u_n и v_n разностного уравнения второго порядка определяется соотношением:

$$\mathcal{K}_n(u, v) = u_{n+1} v_n - u_n v_{n+1}. \tag{22}$$

Для вычисления $\mathcal{K}_n(C^{\mathcal{L}}, S^{\mathcal{L}})$ следует воспользоваться суммой Кристоффеля-Дарбу для полиномов Лагерра [24]:

$$\frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)(x-y)} \left[L_n^{\alpha}(x) L_{n+1}^{\alpha}(y) - L_{n+1}^{\alpha}(x) L_n^{\alpha}(y) \right] = \sum_{m=0}^{n} \frac{m!}{\Gamma(m+\alpha+1)} L_m^{\alpha}(x) L_m^{\alpha}(y) \tag{23}$$

и свойством ортогональности $S_n^{\mathcal{L}}(q)$:

$$\int\limits_0^{\infty} S_n^{\mathcal{L}}(q) S_{n'}^{\mathcal{L}}(q)\ \mathrm{d}q = \lambda^{-1} \delta_{nn'}. \tag{24}$$

В итоге получаем

$$\mathcal{K}_n(C^{\mathcal{L}}, S^{\mathcal{L}}) \ = \ -\frac{2q}{\pi\lambda \sqrt{(n+2)(n+\mathcal{L}+3/2)}}\ . \tag{25}$$

Используя (20), теперь несложно вычислить и определители Казоратти для других пар решений:

$$\mathcal{K}_n(C^{\mathcal{L}(\pm)}, S^{\mathcal{L}}) = \mp \mathrm{i} \mathcal{K}_n(C^{\mathcal{L}(\pm)}, C^{\mathcal{L}}) = \frac{\mathrm{i}}{2} \mathcal{K}_n(C^{\mathcal{L}(+)}, C^{\mathcal{L}(-)}) = \mathcal{K}_n(C^{\mathcal{L}}, S^{\mathcal{L}}). \tag{26}$$

В Приложении Б рассмотрены различные свойства решений (14)–(17), получены их выражения через специальные функции, изучены асимптотики при $n \to \infty$, исследовано аналитическое продолжение, наконец, обсуждаются важные для приложений вопросы численного расчета функций $S_n^{\mathcal{L}}(q)$, $C_n^{\mathcal{L}}(q)$ и $C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)$. Мы же переходим к вопросу о том, какие асимптотики в координатном пространстве соответствуют решениям (14)–(17).

III.Б.1. Решение $S_n^{\mathcal{L}}(q)$

Разностное уравнение (9), которому удовлетворяет $S_n^{\mathcal{L}}(q)$, играет роль свободного уравнения Шредингера в ОП для парциальной волны с гипермоментом K.

В координатном представлении свободное радиальное уравнение Шредингера имеет вид

$$\left[-\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}+1)}{\rho^2}-\varkappa^2\right]\chi_{K\gamma}(\rho)=0. \tag{27}$$

Регулярным решением уравнения (нормированным на δ-функцию от $\varkappa$) является $\chi_{K\gamma}(\rho)=\sqrt{\varkappa\rho}\,J_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(\varkappa\rho)$. Осцилляторные функции в импульсном представлении $S_n^{\mathcal{L}}(q)$ являются коэффициентами разложения функции $\chi_{K\gamma}(\rho)$ по радиальным осцилляторным функциям (4), т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n^{\mathcal{L}}(q)\,\varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho)=\chi_{K\gamma}(\rho)=\sqrt{\varkappa\rho}\,J_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(\varkappa\rho)\underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sin\left(\varkappa\rho-\frac{\pi\mathcal{L}}{2}\right). \tag{28}$$

Для доказательства (28) достаточно вычислить интеграл

$$S_n^{\mathcal{L}}(q)=\int\limits_0^{\infty}\sqrt{\varkappa\rho}\,J_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(\varkappa\rho)\,\varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho)\,\mathrm{d}\rho, \tag{29}$$

что несложно сделать с помощью формул из стандартных справочников (см., например, [30,31]), и убедиться, что полученное выражение совпадает с (14).

III.Б.2. Решения ${}^{\mathcal{L}}_{n}(q)$ *и* ${}^{\mathcal{L}(\pm)}_{n}(q)$

${}^{\mathcal{L}}_{n}(q)$ и ${}^{\mathcal{L}(\pm)}_{n}(q)$ удовлетворяют неоднородному разностному уравнению второго порядка (18). Несложно убедиться, что в координатном пространстве этому уравнению отвечает неоднородное уравнение Шредингера

$$\left[-\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}+1)}{\rho^2}-\varkappa^2\right]\chi_{K\gamma}(\rho)=\frac{2\varkappa}{\pi S_0^{\mathcal{L}}(q)}\,\varphi_0^{\mathcal{L}}(\rho). \tag{30}$$

Для решения уравнения (30) используем аппарат функции Грина. Т. к. функции $\chi_{K\gamma}(\rho)$, определяемые выражением (28), составляют полный набор решений свободного уравнения Шредингера (27) и нормированы на δ-функцию от $\varkappa$, то функцию Грина можно записать в виде

$$G_E^{(\pm)}(\rho,\rho') = -\int\limits_0^\infty \frac{t\,\sqrt{\rho\rho'}\,J_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(t\rho)\,J_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(t\rho')}{\varkappa^2 - t^2 \pm \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}t. \tag{31}$$

Вычисляя этот интеграл с помощью формул из стандартных справочников [30,31], получим

$$G_E^{(+)}(\rho,\rho') = \frac{\mathrm{i}\pi}{2}\sqrt{\rho\rho'}\,J_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(\varkappa\rho_<)\,H^{(1)}_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(\varkappa\rho_>), \tag{32}$$

$$G_E^{(-)}(\rho,\rho') = -\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\sqrt{\rho\rho'}\,J_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(\varkappa\rho_<)\,H^{(2)}_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(\varkappa\rho_>), \tag{33}$$

где под $\rho_>$ $(\rho_<)$ подразумевается большая (меньшая) из величин ρ, ρ'.

Рассмотрим частные решения уравнения (30):

$$\chi^{(\pm)}_{K\gamma}(\rho) = \frac{2\varkappa}{\pi S_0^{\mathcal{L}}(q)}\int\limits_0^\infty G_E^{(\pm)}(\rho,\rho')\,\varphi_0^{\mathcal{L}}(\rho')\,\mathrm{d}\rho'. \tag{34}$$

С помощью (29) и (32)–(33) легко вычислить асимптотики выражения (34):

$$\chi^{(+)}_{K\gamma}(\rho) = \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{i}\sqrt{\varkappa\rho}\,H^{(1)}_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(\varkappa\rho) \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varkappa\rho-\frac{\pi\mathcal{L}}{2})}, \tag{35}$$

$$\chi^{(-)}_{K\gamma}(\rho) = \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} -\mathrm{i}\sqrt{\varkappa\rho}\,H^{(2)}_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(\varkappa\rho) \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varkappa\rho-\frac{\pi\mathcal{L}}{2})}. \tag{36}$$

Найдем коэффициенты $B_n^{(\pm)}(q)$ разложения

$$\chi^{(\pm)}_{K\gamma}(\rho) = \sum_{n=0}^\infty B_n^{(\pm)}(q)\,\varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho), \tag{37}$$

для чего следует вычислить интеграл:

$$B_n^{(\pm)}(q) = \int\limits_0^\infty \chi^{(\pm)}_{K\gamma}(\rho)\,\varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho)\,\mathrm{d}\rho \tag{38}$$

Подставляя (34) в (38) и учитывая (31) и (29), получим для $B_n^{(\pm)}(q)$ выражения, в точности совпадающие с (16)–(17).

Таким образом, физический смысл $C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)$ заключается в том, что ряды $\sum\limits_n C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)\,\varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho)$ сходятся к функциям , которые при $\rho \to \infty$ имеют асимптотику типа сходящихся или расходящихся волн:

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)\,\varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho) \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(\varkappa\rho - \frac{\pi\mathcal{L}}{2})}. \tag{39}$$

Аналогично, с помощью функции Грина

$$G_E^{\mathcal{P}}(\rho,\rho') = \frac{1}{2}\left(G_E^{(+)}(\rho,\rho') + G_E^{(-)}(\rho,\rho')\right) \tag{40}$$

можно показать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_n^{\mathcal{L}}(q)\,\varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho) \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\cos\left(\varkappa\rho - \frac{\pi\mathcal{L}}{2}\right). \tag{41}$$

III.Б.3. Резонансы и связанные состояния

До сих пор мы исследовали решения во “внешней” области для состояний с положительной энергией E. В случае связанных состояний $E < 0$, и мы приходим к исследованию во “внешней” области уравнения (9), в котором следует положить $q^2 < 0$, т. е. следует считать q чисто мнимым. При изучении резонансных состояний системы из A частиц нужно искать решения уравнения Шредингера при комплексных значениях энергии E и импульса q.

Рассмотрим, к чему приведет аналитическое продолжение в комплексную плоскость q волновых функций, получаемых в предлагаемом формализме. В координатном пространстве волновые функции на асимптотике $\rho \to \infty$ определяются рядами вида $\sum\limits_n S_n^{\mathcal{L}}(q)\,\varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho)$, $\sum\limits_n {}_n^{\mathcal{L}}(q)\,\varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho)$ или $\sum\limits_n {}_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)\,\varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho)$, а исследование аналитического продолжения в комплексную плоскость q волновых функций сводится к исследованию аналитического продолжения функций $S_n^{\mathcal{L}}(q)$, ${}_n^{\mathcal{L}}(q)$ и ${}_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)$. Это исследование проведено в Приложении Б, из которого следует, что для связанных состояний, для которых

$q = \mathrm{i}|q|$, только ряды $\sum\limits_n \mathop{}_{n}^{\mathcal{L}(+)}(\mathrm{i}|q|)\, \varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho)$ при $\rho \to \infty$ не содержит экспоненциально растущих членов. Таким образом, именно решения $\mathop{}_{n}^{\mathcal{L}(+)}(\mathrm{i}|q|)$ и следует "сшивать" с решениями во "внутренней" области для связанных состояний системы. Явная формула для их вычисления дана в Приложении (см. (П.Б.13)). Для резонансных состояний наиболее естественно выражать волновую функцию на асимптотике через линейную комбинацию рядов $\sum\limits_n \mathop{}_{n}^{\mathcal{L}(+)}(q)\, \varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho)$ и $\sum\limits_n \mathop{}_{n}^{\mathcal{L}(-)}(q)\, \varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho)$, которые приводят при $\rho \to \infty$ к асимптотикам типа расходящихся и сходящихся сферических волн. Таким образом, решения во "внутренней" области следует в этом случае "сшивать" с решениями $\mathop{}_{n}^{\mathcal{L}(+)}(q)$ и $\mathop{}_{n}^{\mathcal{L}(-)}(q)$ во "внешней" области.

IV. ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ИМР

IV.A. Условие "сшивания" решений во "внутренней" и "внешней" областях

Мы построили фундаментальную систему решений во "внешней" области, т. е. при $n > n_\Gamma$. Теперь нам следует рассмотреть вопрос о связи этих решений с решениями во "внутренней" области. С этой целью ниже дано обобщение на случай ИМР результатов работ [12,32], касающихся сшивки решений во "внутренней" и "внешней" областях в многоканальном случае.

Уравнение Шредингера в гиперсферическом ОП сводится к системе линейных алгебраических уравнений (6). Рассмотрим те из уравнений этой системы, в которых индекс $n \leqslant n_\Gamma$. С учетом (7) и (8) их можно записать в виде

$$\sum_{\Gamma',\, n \leqslant n_{\Gamma'}} \langle n\Gamma\, |H - E|\, n'\Gamma'\rangle\, \langle n'\Gamma' \mid E\beta\rangle = -\, \langle n_\Gamma \Gamma\, |T|\, n_\Gamma + 1, \Gamma\rangle\, \langle n_\Gamma + 1, \Gamma \mid E\beta\rangle\, \delta_{n n_\Gamma}\,. \quad (42)$$

Будем считать, что система однородных уравнений (42) решена, т. е. найдены собственные значения E_λ и собственные векторы $\langle n_\Gamma \Gamma \mid \lambda\rangle$ обрезанной матрицы гамильтониана $\langle n\Gamma|\, H\, |n'\Gamma'\rangle$, $n \leqslant n_\Gamma$, $n' \leqslant n_{\Gamma'}$. Тогда коэффициенты $\langle n\Gamma \mid E\beta\rangle$ для "внутренней" области несложно выразить через набор коэффициентов $\langle n_\Gamma + 1, \Gamma \mid E\beta\rangle$:

$$\langle n\Gamma \mid E\beta\rangle = \sum_{\Gamma'} \langle n\Gamma \,|P|\, n_{\Gamma'}+1,\Gamma'\rangle \, \langle n_{\Gamma'}+1,\Gamma' \mid E\beta\rangle \,, \tag{43}$$

где

$$\langle n\Gamma \,|P|\, n_{\Gamma'}+1,\Gamma'\rangle = \langle n\Gamma \,|\mathfrak{P}|\, n_{\Gamma'}\Gamma'\rangle \, \langle n_{\Gamma'}\Gamma' \,|T|\, n_{\Gamma'}+1,\Gamma'\rangle \,, \tag{44}$$

а матричные элементы $\langle n\Gamma \,|\mathfrak{P}|\, n'\Gamma'\rangle$ матрицы $\mathfrak{P} \equiv (H-E)^{-1}$ в обрезанном осцилляторном пространстве $n \leqslant n_\Gamma$, $n' \leqslant n_{\Gamma'}$ удобно вычислять с помощью выражения

$$\langle n\Gamma \,|\mathfrak{P}|\, n'\Gamma'\rangle = \sum_{\lambda} \frac{\langle n\Gamma \mid \lambda\rangle \, \langle \lambda \mid n'\Gamma'\rangle}{E - E_\lambda} \,. \tag{45}$$

Соотношения (43)–(45) позволяют вычислить волновую функцию во "внутренней" области (при $n \leqslant n_\Gamma$), если известно решение во "внешней" области. С другой стороны, коэффициент $\langle n_\Gamma\Gamma \mid E\beta\rangle$ соотношением (9) связан со всеми коэффициентами $\langle n\Gamma \mid E\beta\rangle$ во "внешней" области (при $n \geqslant n_\Gamma$) и, следовательно, аналогичным образом выражается через фундаментальную систему решений уравнения (9). Поэтому, полагая в (43) $n = n_\Gamma$, получим систему уравнений для определения решений во "внешней" области. Ниже мы подробнее исследуем процедуру построения волновой функции отдельно для дискретного и непрерывного спектров.

IV.Б. Дискретный спектр

Для состояний дискретного спектра волновая функция должна экспоненциально затухать при $\rho \to \infty$. Поэтому в каждом канале во "внешней" области коэффициенты $\langle n\Gamma \mid E\beta\rangle$ разложения (1) пропорциональны ${}^{\mathcal{L}}_{\;n}^{(+)}(\mathrm{i}|q|)$ (см. (П.Б.13)). Обозначая $-\dfrac{[\mathbf{S}]_{\Gamma\Gamma}}{\sqrt{\varkappa}}$ коэффициент пропорциональности в канале Γ, получим при $n \geqslant n_\Gamma$:

$$\langle n\Gamma \mid E\beta\rangle = -\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\,[\mathbf{S}]_{\Gamma\Gamma}\, {}^{\mathcal{L}}_{\;n}^{(+)}(\mathrm{i}|q|). \tag{46}$$

Подставляя (46) в (43), где полагаем $n = n_\Gamma$ и для простоты считаем, что величина $\varkappa = |q|\lambda$ во всех каналах одинакова, получаем:

$$[\mathbf{S}]_{\Gamma\Gamma}\, {}^{\mathcal{L}}_{\;n_\Gamma}^{(+)}(\mathrm{i}|q|) = \sum_{\Gamma'} \langle n_\Gamma\Gamma \,|P|\, n_{\Gamma'}+1,\Gamma'\rangle \, [\mathbf{S}]_{\Gamma'\Gamma'}\, {}^{\mathcal{L}'}_{\;n_{\Gamma'}+1}^{(+)}(\mathrm{i}|q|). \tag{47}$$

Соотношения (47) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений на коэффициенты $[\mathbf{S}]_{\Gamma\Gamma}$. Условие разрешимости этой системы имеет вид:

$$\det \mathbf{A} = 0, \tag{48}$$

где элементы матрицы $\mathbf{A}$ определяются выражениями:

$$[\mathbf{A}]_{\Gamma\Gamma'} = \langle n_\Gamma \Gamma \, |P| \, n_{\Gamma'} + 1, \Gamma' \rangle \, {}^{\mathcal{L}'(+)}_{n_{\Gamma'}+1}(\mathrm{i}|q|) - \delta_{\Gamma\Gamma'} \, {}^{\mathcal{L}\,(+)}_{n_\Gamma}(\mathrm{i}|q|). \tag{49}$$

Условие (48) следует рассматривать как уравнение для определения уровней энергии системы (от энергии зависят не только величины ${}^{\mathcal{L}\,(+)}_{n}(\mathrm{i}|q|)$, но и матричные элементы $\langle n_\Gamma \Gamma \, |P| \, n_{\Gamma'} + 1, \Gamma' \rangle$ — см. (44)–(45)). Найденный путем численного решения уравнения (48) набор уровней дискретного спектра уточняет для связанных состояний значения E_λ, полученные в результате диагонализации обрезанной матрицы гамильтониана.

Для каждого уровня из дискретного спектра, решая систему уравнений (47), находим коэффициенты $[\mathbf{S}]_{\Gamma\Gamma}$, после чего с помощью (46) и (43) получаем волновую функцию. Т. к. набор коэффициентов $[\mathbf{S}]_{\Gamma\Gamma}$ можно определить только с точностью до общего множителя, то волновую функцию следует отнормировать.

IV.B. Непрерывный спектр

В непрерывном спектре решение во "внешней" области будем строить в виде суперпозиции расходящихся и сходящихся волн (т. е. решений (16) и (17), соответственно). Пусть сходящаяся волна имеется только в канале Γ', а расходящиеся волны — во всех каналах. Тогда при $n \geqslant n_\Gamma$:

$$\langle n\Gamma \mid E\beta \rangle = \frac{1}{2\sqrt{\varkappa}} \left(\delta_{\Gamma\Gamma'} \, {}^{\mathcal{L}\,(-)}_{n}(q) - {}^{\mathcal{L}\,(+)}_{n}(q) \, [\mathbf{S}]_{\Gamma\Gamma'} \right), \tag{50}$$

где $[\mathbf{S}]_{\Gamma\Gamma'}$ по своему смыслу аналогичны матричным элементам S-матрицы. По аналогии с тем, как было получено (47), выводим уравнение для определения S-матрицы:

$$\mathbf{A}^s \, \mathbf{S} = \mathbf{B}^s, \tag{51}$$

где матрицы $\mathbf{A}^s$ и $\mathbf{B}^s$ имеют следующие элементы:

$$[\mathbf{A}^s]_{\Gamma'\Gamma} = \langle n_{\Gamma'}\Gamma' \,|P|\, n_\Gamma + 1, \Gamma\rangle \, {}^{\mathcal{L}(+)}_{n_\Gamma+1}(q) - \delta_{\Gamma\Gamma'} \, {}^{\mathcal{L}\ (+)}_{n_\Gamma}(q), \tag{52}$$

$$[\mathbf{B}^s]_{\Gamma'\Gamma} = \langle n_{\Gamma'}\Gamma' \,|P|\, n_\Gamma + 1, \Gamma\rangle \, {}^{\mathcal{L}(-)}_{n_\Gamma+1}(q) - \delta_{\Gamma\Gamma'} \, {}^{\mathcal{L}\ (-)}_{n_\Gamma}(q). \tag{53}$$

Таким образом,

$$\mathbf{S} = (\mathbf{A}^s)^{-1}\,\mathbf{B}^s. \tag{54}$$

Здесь, как и в (47), полагалось, что импульсы $\varkappa$ во всех каналах одинаковы. Вычислив S-матрицу при заданной энергии E, используя (54), на основе решений (16)–(17) строим сначала с помощью (50) волновую функцию с требуемой асимптотикой во “внешней” области, а затем, используя (43), — и во “внутренней” области. При этом следует помнить, что решения (16)–(17) соответствуют нормировке на δ-функцию от импульса $\varkappa = q\lambda$.

С точки зрения численных расчетов вместо непосредственного вычисления S-матрицы по формуле (54), в которую входят комплексные матрицы (52) и (53), эффективнее предварительно вычислить так называемую K-матрицу. K-матрица действительна, и она соответствует представлению решения в канале Γ вместо (50) в форме

$$\langle n\Gamma \mid E\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_\Gamma} \left(\delta_{\Gamma\Gamma'} \, {}^{\mathcal{L}}_{n}(q) - S^{\mathcal{L}}_n(q)\,[\mathbf{K}]_{\Gamma\Gamma'}\right), \tag{55}$$

где фаза ИМР δ_Γ определяется выражением $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_\Gamma} = [\mathbf{S}]_{\Gamma\Gamma}$. Вводя матрицы

$$\left[\mathbf{A}^K\right]_{\Gamma'\Gamma} = \langle n_{\Gamma'}\Gamma' \,|P|\, n_\Gamma + 1, \Gamma\rangle \, S^{\mathcal{L}}_{n_\Gamma+1}(q) - \delta_{\Gamma\Gamma'} \, S^{\mathcal{L}}_{n_\Gamma}(q), \tag{56}$$

$$\left[\mathbf{B}^K\right]_{\Gamma'\Gamma} = \langle n_{\Gamma'}\Gamma' \,|P|\, n_\Gamma + 1, \Gamma\rangle \, {}^{\mathcal{L}}_{n_\Gamma+1}(q) - \delta_{\Gamma\Gamma'} \, {}^{\mathcal{L}}_{n_\Gamma}(q), \tag{57}$$

получаем:

$$\mathbf{K} = (\mathbf{A}^K)^{-1}\,\mathbf{B}^K. \tag{58}$$

Теперь для вычисления S-матрицы используем

$$\mathbf{S} = (\mathbf{I} + \mathrm{i}\,\mathbf{K})(\mathrm{i}\,\mathbf{K} - \mathbf{I})^{-1}, \tag{59}$$

где под $\mathbf{I}$ подразумевается единичная матрица. В (59) можно выделить действительную и мнимую части:

$$\mathrm{Re}\,\mathbf{S} = \mathbf{I} - 2\left(\mathbf{I} + \mathbf{K}^2\right)^{-1}, \tag{60}$$

$$\mathrm{Im}\,\mathbf{S} = -2\mathbf{K}\left(\mathbf{I} + \mathbf{K}^2\right)^{-1}. \tag{61}$$

Отметим, что из (54) следует, что полюсы S-матрицы в комплексной плоскости могут быть найдены путем решения уравнения

$$\det \mathbf{A}^s = 0, \tag{62}$$

где $\mathbf{A}^s$ определяется выражением (52). При этом уравнение (48), определяющее энергию связанных состояний системы, очевидно, является частным случаем (62) для полюсов S-матрицы, расположенных на мнимой оси.

В рамках предлагаемого подхода может быть построена волновая функция в приближении ИМР, в которой учтено большое количество компонент с различными значениями гипермомента K. Однако из-за высокого центробежного барьера $\mathcal{L}(\mathcal{L}+1)/\rho^2 = \left(K + \frac{3A-6}{2}\right)\left(K + \frac{3A-4}{2}\right)/\rho^2$ учет каналов с большими значениями K во "внешней" области, видимо, будет несущественным при ограниченных энергиях системы E. Поэтому можно в качестве простейшего "минимального" приближения учесть во "внешней" области только один канал с $K = K_{min}$ (см., например, по этому поводу [23], где исследовались монопольные возбуждения ядра ^{12}C с учетом его развала на три α-частицы). Минимальное приближение соответствует учету связи открытого канала с $K = K_{min}$ с искусственно закрытыми каналами с $K > K_{min}$, если во "внутренней" области в разложение волновой функции включаются компоненты с $K > K_{min}$. В этом случае упростится вычисление многих величин. В частности, для коэффициентов $\langle n\Gamma \mid E\beta\rangle$ разложения (1) во "внешней" области можно использовать выражение

$$\langle n\Gamma \mid E\beta\rangle \;=\; \left[\cos\delta_0\; S_n^{\mathcal{L}_0}(q) \;+\; \sin\delta_0\; {}_n^{\mathcal{L}_0}(q)\right]\delta_{KK_{min}}, \tag{63}$$

где $\mathcal{L}_0 = K_{min} + \frac{3A-6}{2}$, а δ_0 — фаза ИМР в канале, соответствующем $K = K_{min}$. Условия "сшивания" тогда приводят к следующему соотношению для определения фазы δ_0:

$$\operatorname{tg}\delta_0 = -\frac{S_\nu^{\mathcal{L}_0}(q) - S_{\nu+1}^{\mathcal{L}_0}(q)\,P_0}{C_\nu^{\mathcal{L}_0}(q) - C_{\nu+1}^{\mathcal{L}_0}(q)\,P_0}, \tag{64}$$

где $\nu = n_{\Gamma_0}$, $P_0 = \langle \nu\Gamma_0\,|P|\,\nu+1,\Gamma_0\rangle$, $\Gamma_0 = \{K_{min}, \gamma\}$.

Вместо одного канала во "внешней" области можно учесть два или несколько каналов, соответствующих минимальным значениям гипермомента K. При этом во "внутренней" области можно оставить гораздо большее число компонент, соответствующих различным значениям K. Физически это означает, что на больших расстояниях будут учтены только существенные компоненты волновой функции и отброшены компоненты с большими K, подавленные центробежным барьером, однако это не испортит описание волновой функции на малых расстояниях, где учет компонент с большими K важен для описания короткодействующих корреляций. Такая гибкость позволяет строить высокоэффективные и точные подходы к описанию систем нескольких частиц.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше получены все необходимые выражения для построения волновой функции системы нескольких частиц в дискретном или в непрерывном спектре в приближении ИМР. Существенное достоинство предлагаемого подхода заключается в том, что наиболее трудоемкую часть — построение и диагонализацию обрезанной матрицы гамильтониана — необходимо провести только один раз, после чего волновая функция может быть вычислена при любой заданной энергии. Энергетическая зависимость S-матрицы, волновых функций и других наблюдаемых определяется только энергетическим знаменателем в уравнении (45) и зависимостью от энергии свободных решений в ОП $S_n^{\mathcal{L}}(q)$, $C_n^{\mathcal{L}}(q)$ и $C_n^{\mathcal{L}\,(\pm)}(q)$, для которых получены аналитические выражения. Это позволяет проводить подробные расчеты в широком энергетическом интервале с мелким шагом по энергии, практически осуществить выход в комплексную плоскость энергий для расчета полюсов многочастичной S-матрицы и т. д.

Несомненным достоинством формализма для ядерно-физических приложений является представление волновой функции в виде суперпозиции осцилляторных функций, что позволяет дать наглядную интерпретацию полученных решений в терминах модели оболочек.

Авторы благодарны Н.А.Свешникову, С.К.Суслову и Г.Ф.Филиппову за стимулирующие дискуссии. Работа выполнена при частичной поддержке Конкурсного Центра фундаментального естествознания при Санкт-Петербургском университете и Государственной Программы Университеты России.

ПРИЛОЖЕНИЯ.

П.А. δ-функция как предел осцилляторной функций при большом значении главного квантового числа

Утверждение о том, что при больших значениях главного квантового числа n осцилляторная функция $\varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho)$ ведет себя как δ-функция Дирака встречается впервые, видимо, в работе [14]. Однако, насколько нам известно, в явном виде выражение для δ-функции как предела $\varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho)$ при $n \to \infty$ нигде не опубликовано. Поскольку это выражение весьма полезно для анализа асимптотик волновых функций в ОП, мы приводим его в этом Приложении.

Собственное состояние уравнения Шредингера для гармонического осциллятора, характеризуемое энергией $E_n = \hbar\omega\left(2n + \mathcal{L} + \frac{3}{2}\right)$, имеет классическую точку поворота

$$\rho_{\text{пов}} = \frac{1}{\lambda}\left[2n + \mathcal{L} + \frac{3}{2} + \sqrt{\left(2n + \mathcal{L} + \frac{3}{2}\right)^2 - \mathcal{L}(\mathcal{L}+1)}\,\right]^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{\lambda}\sqrt{2\left(2n + \mathcal{L} + \frac{3}{2}\right)}\,. \tag{П.А.1}$$

Последнее равенство справедливо с точностью до членов второго порядка по $\dfrac{1}{n}$. Осцилляторная функция $\varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho)$ при $n \gg 1$ достаточно быстро осциллирует на интервале $0 < \rho < \rho_{\text{пов}}$. Таким образом, область интегрирования $0 < \rho < \rho_{\text{пов}}$ не вносит вклад в интегралы типа $\displaystyle\int f(\rho)\,\varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho)\,\mathrm{d}\rho$ с достаточно медленно меняющимися функциями $f(\rho)$. В тоже время, область интегрирования $\rho > \rho_{\text{пов}}$ также не вносит вклад в интеграл из-за быстрого затухания функции $\varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho)$, определяемого множителем $e^{-\lambda^2\rho^2/2}$ в (4). Таким образом, вклад в интеграл дает только достаточно малая окрестность точки поворота, т. е. $\displaystyle\int f(\rho)\,\varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho)\,\mathrm{d}\rho \sim f(\rho_{\text{пов}})$, или, иными словами, $\varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho) = g\,\delta(\rho - \rho_{\text{пов}})$ при $n \gg 1$, где множитель g, вообще говоря, зависит от n.

Для вычисления множителя g используем соотношение (29), в левой части которого заменим свободную волновую функцию в ОП $S_n^{\mathcal{L}}(q)$ ее асимптотическим выражением (П.Б.18). В результате находим:

$$\varphi_n^{\mathcal{L}}(\rho) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda^{-\frac{1}{2}} \left(n + \frac{\mathcal{L}}{2} + \frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} \delta\left(\rho - \frac{2}{\lambda}\sqrt{n + \frac{\mathcal{L}}{2} + \frac{3}{4}}\right). \tag{П.А.2}$$

П.Б. Свойства функций $S_n^{\mathcal{L}}(q)$, $C_n^{\mathcal{L}}(q)$ и $C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)$

П.Б.1. Выражения для функций $C_n^{\mathcal{L}}(q)$ и $C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)$ через специальные функции

Найдем выражение решений $C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)$ через известные специальные функции. Для этого несколько преобразуем интеграл в (16), введя обозначения $s = q'^2$, $\alpha = \mathcal{L} + \dfrac{1}{2}$, и воспользуемся формулой Родрига для полиномов Лагерра [33]:

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!}\,\mathrm{e}^{x} x^{-\alpha}\,\frac{d^n}{dx^n}\left(\mathrm{e}^{-x} x^{n+\alpha}\right). \tag{П.Б.1}$$

Тогда в результате n-кратного интегрирования по частям, получим следующее выражение для $C_n^{\mathcal{L}(+)}(q)$:

$$C_n^{\mathcal{L}(+)}(q) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2n!}{\lambda\,\Gamma(\mathcal{L} + n + 3/2)}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{q^2/2}\, q^{-\mathcal{L}}\, \Im_n^{\alpha(+)}(q), \tag{П.Б.2}$$

где

$$\Im_n^{\alpha(+)}(q) = \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-s} s^{\alpha+n}}{\bigl(s-(q^2+\mathrm{i}\varepsilon)\bigr)^{n+1}}\ \mathrm{d}s. \tag{П.Б.3}$$

Для вычисления интеграла в (П.Б.3) в случае $q^2 > 0$ определим переменную $z = -(q^2+\mathrm{i}\varepsilon)$, так что $\arg z = \phi = -\pi + \beta$, $\beta \to +0$ (т. е. $\phi > -\pi$). Тогда, сделав в (П.Б.3) замену $t = s/z$, получим для $\Im_n^{\alpha(+)}(q)$ выражение

$$\Im_n^{\alpha(+)}(q) = z^\alpha \int\limits_0^{\infty\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \mathrm{e}^{-tz} t^{\alpha+n}(t+1)^{-n-1}\ \mathrm{d}t, \tag{П.Б.4}$$

где $\varphi = -\phi < \pi$, которое сравним с интегральным представлением вырожденной гипергеометрической функции Трикоми $\Psi(a,c;x)$ [34]

$$\begin{gathered}\Psi(a,c;x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int\limits_0^{\infty\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \mathrm{e}^{-xt}\, t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}\ \mathrm{d}t,\\ \operatorname{Re} a > 0,\ -\pi < \varphi < \pi,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi + \arg x < \frac{\pi}{2},\end{gathered} \tag{П.Б.5}$$

где предполагается, что функции t^{a-1} и $(1+t)^{c-a-1}$ принимают главные значения. В результате такого сравнения становится очевидным, что интеграл $\Im_n^{\alpha(+)}(q)$ выражается через главное значение функции Трикоми $\Psi(a,c;x)$ на нижнем берегу разреза вдоль отрицательной вещественной полуоси, т. е. в точке $x = \mathrm{e}^{-i\pi}q^2$; причем $a = n + \mathcal{L} + \dfrac{3}{2}$ и $c = \mathcal{L} + \dfrac{3}{2}$. Аналогичные рассуждения можно провести и для $C_n^{\mathcal{L}(-)}(q)$. Таким образом, окончательное выражение для $C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)$ принимает вид

$$C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q) = \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}}\ \sqrt{2n!\,\Gamma(n+\mathcal{L}+3/2)}\ \mathrm{e}^{q^2/2}\ q^{\mathcal{L}+1}\ \mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\pi(\mathcal{L}+\frac{1}{2})}\ \Psi\left(n+\mathcal{L}+\frac{3}{2},\, \mathcal{L}+\frac{3}{2};\, \mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\pi}q^2\right). \tag{П.Б.6}$$

Функцию $C_n^{\mathcal{L}}(q)$ можно выразить через функцию Лагерра 2-ого рода $Q_n^\alpha(z)$ [35,33]:

$$C_n^{\mathcal{L}}(q) = \frac{1}{\pi}\ \sqrt{\frac{2n!}{\lambda\Gamma(n+\mathcal{L}+3/2)}}\ q^{\mathcal{L}+1}\ e^{-q^2/2}\, Q_n^{\mathcal{L}+1/2}(q^2). \tag{П.Б.7}$$

Соотношение (П.Б.7) следует из сравнения (15) с интегральным представлением для $Q_n^\alpha(z)$ [35,33]:

$$Q_n^\alpha(z) = \frac{1}{z^\alpha \mathrm{e}^{-z}} \;\; \mathcal{P}\int\limits_0^\infty \frac{t^\alpha \mathrm{e}^{-t} L_n^\alpha(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t. \tag{П.Б.8}$$

Кроме того, используя (21) и (П.Б.6), функцию $C_n^{\mathcal{L}}(q)$ можно выразить через сумму функций Трикоми $\Psi\left(n+\mathcal{L}+\frac{3}{2},\ \mathcal{L}+\frac{3}{2};\ -q^2\right)$ на верхнем и нижнем берегах разреза вдоль отрицательной действительной полуоси.

Все приведенные выше выражения можно использовать для системы произвольного числа частиц. Отметим, что $\mathcal{L}$ — целое в случае четного числа частиц A, и, соответственно, параметры функции Трикоми $\left(n+\mathcal{L}+\frac{3}{2}\right)$ и $\left(\mathcal{L}+\frac{3}{2}\right)$— полуцелые. Тогда выражения для решений $C_n^{\mathcal{L}}(q)$ и $C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)$ можно упростить, поскольку в этом случае функцию $\Psi(a,c;-x)$ можно выразить (см., например, [34]) через вырожденные гипергеометрические функции ${}_1F_1(-a,c;x)$ и ${}_1F_1(1-a,2-c;x)$, причем функцию ${}_1F_1(-a,c;x)$ можно выразить через присоединенный полином Лагерра, поскольку имеем $c-a=-n$. В результате искомые выражения принимают вид:

$$C_n^{\mathcal{L}}(q) = \left(\frac{2n!}{\lambda\,\Gamma(\mathcal{L}+n+3/2)}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(\mathcal{L}+1/2)}{\pi}\,\mathrm{e}^{-q^2/2}\,q^{-\mathcal{L}}\,{}_1F_1\left(-n-\mathcal{L}-\frac{1}{2},\ -\mathcal{L}+\frac{1}{2};\ q^2\right), \tag{П.Б.9}$$

$$\begin{aligned} C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q) &= \left(\frac{2n!}{\lambda\,\Gamma(\mathcal{L}+n+3/2)}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-q^2/2}\times \\ &\times\left[\frac{\Gamma(\mathcal{L}+1/2)}{\pi}\,q^{-\mathcal{L}}\,{}_1F_1\left(-n-\mathcal{L}-\frac{1}{2},\ -\mathcal{L}+\frac{1}{2};\ q^2\right)\ \pm\ \mathrm{i}\,q^{\mathcal{L}+1}L_n^{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(q^2)\right]. \end{aligned} \tag{П.Б.10}$$

Для случая обычного двухчастичного рассеяния ($A=2$) выражение (П.Б.9) было получено в [15].

П.Б.2. Аналитическое продолжение функций $C_n^{\mathcal{L}}(q)$ и $C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)$ в комплексную плоскость q

Аналитическое продолжение в комплексную плоскость q осцилляторной функции в импульсном представлении $S_n^{\mathcal{L}}(q)$, выражающейся через полином Лагерра (см. (14)), тривиально. В связи с этим мы обсуждаем ниже только аналитическое продолжение функций $C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)$ и $C_n^{\mathcal{L}}(q)$.

Заметим, что при выводе (П.Б.6) для вещественных положительных q^2 нами была произведена замена $-(q^2 \pm \mathrm{i}\,\varepsilon) \to \mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\pi}(q^2 \pm \mathrm{i}\,\varepsilon)$, которая позволила выразить решение $C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)$ через значения главной ветви функции Трикоми $\Psi(a, c; x)$. Выражение (П.Б.6) можно рассматривать, как определение функции $C_n^{\mathcal{L}(+)}(q)$ ($C_n^{\mathcal{L}(-)}(q)$) в верхней (нижней) полуплоскости комплексной плоскости импульсов q, где $0 < \arg q \leqslant \pi$ ($-\pi < \arg q \leqslant 0$). Аналитическое продолжение $C_n^{\mathcal{L}(+)}(q)$ ($C_n^{\mathcal{L}(-)}(q)$) в нижнюю (верхнюю) полуплоскость q можно осуществить с помощью формул аналитического продолжения функции $\Psi(a, c; x)$ (см., например, [34]). Результирующая формула имеет вид

$$C_n^{\mathcal{L}(+)}(q) = C_n^{\mathcal{L}(-)}(q) + 2\,\mathrm{i}\,S_n^{\mathcal{L}}(q). \tag{П.Б.11}$$

Аналогичная формула для аналитического продолжения $C_n^{\mathcal{L}(-)}(q)$ в верхнюю полуплоскость q такова:

$$C_n^{\mathcal{L}(-)}(q) = C_n^{\mathcal{L}(+)}(q) - 2\,\mathrm{i}\,S_n^{\mathcal{L}}(q). \tag{П.Б.12}$$

Задав с помощью формул аналитического продолжения (П.Б.11)–(П.Б.12) функции $C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)$ во всей комплексной плоскости q, мы тем самым с учетом (21) задали во всей комплексной плоскости q и функцию $C_n^{\mathcal{L}}(q)$.

Формулы аналитического продолжения (П.Б.11), (П.Б.12) представляют практический интерес для расчета полюсов S-матрицы. При этом в случае резонансов нас в первую очередь интересуют функции $C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)$ в нижней полуплоскости комплексной плоскости q, а в случае связанных состояний наибольший интерес представляет функция $C_n^{\mathcal{L}(+)}(q)$ от чисто мнимого $q = \mathrm{i}\,|q|$. В виду важности этого случая приведем явный вид интегрального представления для функции $C_n^{\mathcal{L}(+)}(\mathrm{i}\,q)$, которое не содержит никаких особенностей:

$${}_{n}^{\mathcal{L}(+)}(\mathrm{i}|q|) = \frac{2}{\pi}\,\sqrt{\frac{2n!}{\lambda\Gamma(n+\mathcal{L}+3/2)}}\;|q|^{\mathcal{L}}\mathrm{e}^{-|q|^2/2}\int\limits_0^\infty \frac{t^{2\mathcal{L}+2}\mathrm{e}^{-t^2}L_n^{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}(t^2)}{|q|^2+t^2}\,\mathrm{d}t\,. \tag{П.Б.13}$$

П.Б.3. Асимптотики функций $S_n^{\mathcal{L}}(q)$, $C_n^{\mathcal{L}}(q)$ и $C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)$ при $n \to \infty$

Найдем асимптотику функций $C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)$ (16)–(17) при больших значениях индекса n (и ограниченных q). Для этого мы воспользуемся асимптотическим выражением для функции Трикоми $\Psi(a, c; x)$ из книги [36], которое с учетом очевидных переобозначений имеет вид:

$$\Psi\left(\frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{2}b, b; z^2\right) \underset{u\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{z^2/2} z^{1-b} \, \frac{2^{2-b}u^{b-1}}{\Gamma(\frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{2}b)} \, K_{b-1}(uz), \tag{П.Б.14}$$

где b и z^2 предполагаются ограниченными, а $K_\nu(x)$ — модифицированная функция Ганкеля. Переходя к функциям $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$, получаем асимптотические выражения для $C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)$:

$$\begin{aligned} C_n^{\mathcal{L}(+)}(q) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\mathrm{i}\sqrt{\frac{2q}{\lambda}}\, H^{(1)}_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}\left(2\left(n + \frac{\mathcal{L}}{2} + \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} q\right) \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\left(n + \frac{\mathcal{L}}{2} + \frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\mathrm{i}\left[2\left(n + \frac{\mathcal{L}}{2} + \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} q - \frac{\pi\mathcal{L}}{2}\right]\right), \end{aligned} \tag{П.Б.15}$$

$$\begin{aligned} C_n^{\mathcal{L}(-)}(q) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\mathrm{i}\sqrt{\frac{2q}{\lambda}}\, H^{(2)}_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}\left(2\left(n + \frac{\mathcal{L}}{2} + \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} q\right) \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\left(n + \frac{\mathcal{L}}{2} + \frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\mathrm{i}\left[2\left(n + \frac{\mathcal{L}}{2} + \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} q - \frac{\pi\mathcal{L}}{2}\right]\right). \end{aligned} \tag{П.Б.16}$$

Таким образом, полученные нами выражения (П.Б.6) для решений ТРС (9) $C_n^{\mathcal{L}(\pm)}(q)$ имеют асимптотику расходящихся и сходящихся сферических волн в ОП.

Асимптотика решения $C_n^{\mathcal{L}}(q)$ легко находится с помощью (21) и асимптотик (П.Б.15)–(П.Б.16):

$$\begin{aligned} C_n^{\mathcal{L}}(q) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\sqrt{\frac{2q}{\lambda}}\, N_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}\left(2\left(n + \frac{\mathcal{L}}{2} + \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} q\right) \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\left(n + \frac{\mathcal{L}}{2} + \frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} \cos\left(2\left(n + \frac{\mathcal{L}}{2} + \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} q\right). \end{aligned} \tag{П.Б.17}$$

Наконец, асимптотика решения $S_n^{\mathcal{L}}(q)$ легко находится с помощью (20) и асимптотик (П.Б.15)–(П.Б.17) или непосредственно из асимптотических разложений для полиномов Лагерра (см., например, [24]):

$$
\begin{aligned}
S_n^{\mathcal{L}}(q) \; &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2q}{\lambda}}\, J_{\mathcal{L}+\frac{1}{2}}\left(2\left(n+\frac{\mathcal{L}}{2}+\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} q\right) \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\left(n+\frac{\mathcal{L}}{2}+\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} \sin\left(2\left(n+\frac{\mathcal{L}}{2}+\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} q\right).
\end{aligned}
\qquad (\text{П.Б.18})
$$

П.Б.4. О нахождении численных значений $S_n^{\mathcal{L}}(q)$, ${}_{n}^{\mathcal{L}}(q)$ и ${}_{n}^{\mathcal{L}\,(\pm)}(q)$

Наиболее эффективным методом вычисления численных значений решений (14)–(17) при произвольных n представляется непосредственное использование рекуррентных соотношений (9) (для $S_n^{\mathcal{L}}(q)$) и (18) (для решений (15)–(17)). При этом рекурсию можно осуществлять как сверху вниз (от больших значений n к малым), так и снизу вверх (от малых значений n к большим). В первом случае можно выбрать некоторое $m \gg 1$ и рассчитать пару затравочных значений $A_m^{\mathcal{L}}(q)$ и $A_{m+1}^{\mathcal{L}}(q)$ (под $A_n^{\mathcal{L}}(q)$ подразумевается одна из функций $S_n^{\mathcal{L}}(q)$, ${}_{n}^{\mathcal{L}}(q)$ или ${}_{n}^{\mathcal{L}\,(\pm)}(q)$), необходимых для начала расчетов по рекуррентному соотношению (9) или (18), используя одно из асимптотических выражений (П.Б.15)–(П.Б.18). Этот алгоритм весьма прост в реализации, однако при определенных условиях может привести к численным неустойчивостям при нахождении функций при малых n.

Более устойчивой является рекурсия снизу вверх. Для определения начальных значений функций в этом алгоритме следует воспользоваться соотношениями:

$$L_{-1}^{\alpha}(x) = 0, \;\; L_0^{\alpha}(x) = 1. \qquad (\text{П.Б.19})$$

В результате $S_{-1}^{\mathcal{L}}(q) = C_{-1}^{\mathcal{L}}(q) = {}_{-1}^{\mathcal{L}\,(\pm)}(q) = 0$. Значение $S_0^{\mathcal{L}}(q)$ получим непосредственно из (14) при помощи (П.Б.19), а для вычисления ${}_{0}^{\mathcal{L}}(q)$ и ${}_{0}^{\mathcal{L}\,(\pm)}(q)$ следует вычислять интегралы, входящие в выражения (15)–(17) с учетом (П.Б.19). Отметим, что интеграл (15) при $n = 0$ несложно выразить при нечетном A через интегральную экспоненту, а при четном A — через функцию ошибок (соответствующие выражения для случая $A = 2$ приведены в работе [15]).

Аналогичным образом можно вычислять и решение (П.Б.13) для связанных состояний, а также функции ${}_{n}^{\mathcal{L}}{}^{(\pm)}(q)$ для комплексных значений q.

Вместо численного вычисления интегралов для нахождения затравочных значений ${}_{0}^{\mathcal{L}}{}^{(\pm)}(q)$ и ${}_{0}^{\mathcal{L}}(q)$ можно использовать и аналитические выражения для этих функций (П.Б.6), (П.Б.7) или (П.Б.9)–(П.Б.10) через функцию Трикоми или вырожденные гипергеометрические функции, а также различные соотношения для этих специальных функций, которые можно найти в многочисленных справочниках и монографиях. В частности, можно использовать непрерывные дроби, которые дают один из наиболее устойчивых и точных методов расчета различных гипергеометрических функций [37]. При использовании различных соотношений для функции Трикоми следует, однако, проявлять аккуратность, когда число частиц A нечетно ($\mathcal{L}$ — полуцелое), т. к. в этом случае функции $\Psi\left(n + \mathcal{L} + \frac{3}{2},\, \mathcal{L} + \frac{3}{2};\, \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\pi} q^2\right)$ относятся к специальному, так называемому, логарифмическому случаю и для их расчета следует использовать только те выражения, которые справедливы в этом случае.

Литература

[1] Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д. Квантовая теория рассеяния для системы нескольких частиц. –М.: Наука, 1985.

[2] Джибути Р.И., Крупенникова Н.Б. Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел. –Тбилиси: Мецниереба, 1984.

[3] Джибути Р.И. –ЭЧАЯ, 1983, **14**, 741.

[4] Shirokov A.M. –Proc. Int. Conf. Perspectives of Nucl. Phys. in the Late Nineties (Hanoi, Vietnam, March 14–18, 1994). Eds. Nguyen Dinh Dang, Da Hsuan Feng, Nguyen Van Giai, Nguyen Dinh Tu. Singapore: World Scientific, 1995, 295.

[5] Danilin B.V., Zhukov M.V., Vaagen J.S., Bang J.M. –Phys. Lett. B, 1993, **302**, 129.

[6] Danilin B.V., Rogde T., Ershov S.N., Heiberg-Andersen H., Vaagen J.S., Thompson I.J., Zhukov M.V. –Phys. Rev. C, 1997, **55**, R577.

[7] Fedorov D.V., Jensen A.S., Riisager K. –Phys. Rev. C, 1994, **49**, 201.

[8] Smirnov Yu.F., Lurie Yu.A., Shirokov A.M. –Revista Mex. Fis., 1994, **40**, Supl. 1, 63.

[9] Лурье Ю.А., Широков А.М., Банг Й.М. –Изв. РАН, Сер. физ., 1997, **61**, 87.

[10] Лурье Ю.А., Широков А.М. –Изв. РАН, Сер. физ., 1997, **61**, 2121.

[11] Sofianos S.A., Rakityansky S.A., Vermaak G.P. –J. Phys. G, 1997, **23**, 1619.

[12] Yamani H.A., Fishman L. –J. Math. Phys. 1975, **16**, 410.

[13] Broad J.T. –Phys. Rev. A, 1978, **18**, 1012.

[14] Филиппов Г.Ф., Охрименко И.П. –ЯФ, 1980, **32**, 932; Филиппов Г.Ф. –ЯФ, 1981, **33**, 928.

[15] Smirnov Yu.F., Nechaev Yu.I. –Kinam, 1982, **4**, 445; Нечаев Ю.И, Смирнов Ю.Ф. –ЯФ, 1982, **35**, 1385.

[16] Revai J., Sotona M., Zofka J. –J. Phys. G, 1985, **11**, 745.

[17] Филиппов Г.Ф., Василевский В.С., Нестеров А.В. –ЯФ, 1984, **40**, 1418.

[18] Okhrimenko I.P. –Nucl. Phys. A, 1984, **426**, 121.

[19] Филиппов Г.Ф., Василевский В.С., Чоповский Л.Л. –ЭЧАЯ, 1984, **15**, 1338; 1985, **16**, 349.

[20] Filippov G.F. –Rivista Nuovo Cim., 1989, **12**, 1.

[21] Кныр В.А., Мазур А.И., Смирнов Ю.Ф. –ЯФ, 1990, **52**, 754; 1991, **54**, 1518; 1993, **56**, 72.

[22] Смирнов Ю.Ф., Широков А.М. –Препринт ИТФ-88-47Р. Киев: 1988.

[23] Михелашвили Т.Я., Смирнов Ю.Ф., Широков А.М. –ЯФ, 1988, **48**, 969; Mikhelashvili T.Ya., Shirokov A.M., Smirnov Yu.F. –J. Phys. G, 1990, **16**, 1241.

[24] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 2. –М.: Наука, 1974.

[25] Смирнов Ю.Ф., Шитикова К.В. –ЭЧАЯ, 1977, **8**, 847.

[26] Smirnov Yu.F., Suslov S.K., Shirokov A.M. –J. Phys. A, 1984, **17**, 2157.

[27] Braun P.A., Shirokov A.M., Smirnov Yu.F. –Molec. Phys., 1985, **56**, 573.

[28] Янке К., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. –М.: Наука, 1977.

[29] Миролюбов А.А., Солдатов М.А. Линейные однородные разностные уравнения. –М.: Наука, 1981.

[30] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений. –М.: Физматгиз, 1963.

[31] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. –М.: Наука, 1983.

[32] Broad J.T., Reinhardt W.P. –J. Phys. B, 1976, **9**, 1491.

[33] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. –М.: Наука, 1984.

[34] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1. –М.: Наука, 1973.

[35] Уваров В.Б. –ДАН СССР, 1959, **125**, 281.

[36] Слейтер Л.Дж. Вырожденные гипергеометрические функции. –М.: Вычислительный центр АН СССР, 1966.

[37] Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. –М.: Мир, 1985.