УДК 539.12.01

ИНВАРИАНТНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ИНФРАКРАСНЫХ РАСХОДИМОСТЕЙ В МЕТОДЕ ФОНОВОГО ПОЛЯ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕОРИЙ

В. В. Белокуров, В. Е. Тарасов

(НИИЯФ)

Обсуждаются различные способы разделения ультрафиолетовых и инфракрасных расходимостей в двумерных нелинейных сигма-моделях. Предложена инфракрасная регуляризация, учитывающая эффект ультрафиолетовой перенормировки в предыдущих порядках, которая обеспечивает получение инвариантных ультрафиолетовых контрчленов методом фонового поля.

Метод фонового поля представляет собой эффективный способ определения квантовых поправок в квантовой теории поля (см., напр., [1] и цитируемую там литературу). Особенно велика его роль в нелинейных квантовополевых моделях, имеющих сложную структуру симметрии, и в частности в двумерных нелинейных сигма-моделях (ДНСМ), которые можно рассматривать как перенормируемые в обобщенном смысле [2]. В работах [3, 4], а также [5] был развит явно ковариантный формализм нахождения контрчленов в рамках этого метода в ДНСМ, используемый во всех последующих вычислениях как в бозонных, так и в суперсимметричных вариантах.

Суть метода фонового поля, как известно, составляет следующее важное свойство. Если расщепить квантовое поле $\varphi(x)$ на классическое (фоновое) поле $\Phi(x)$ и квантовую добавку $\pi(x)$, то обычное эффективное действие равно производящему функционалу одночастично неприводимых вакуумных диаграмм в присутствии фонового поля. Другими словами, чтобы получить производящий функционал для всех одночастично неприводимых диаграмм, достаточно вычислить лишь вакуумные диаграммы (т. е. без внешних линий, соответствующих квантовым полям), в вершинах которых присутствуют внешние фоновые поля.

Для ДНСМ такая простая схема вычислений оказывается недостаточной из-за нелинейного характера разбиения поля на классическую и квантовую части. В этой теории для устранения всех ультрафиолетовых (УФ) расходимостей в высших петлях, кроме добавления контрчленов, имеющих структуру действия и трактуемых как перенормировка метрики пространства-мишени, оказывается необходимой еще и немультипликативная перенормировка квантового поля [6, 7].

Полученная в работе [7] добавка к двухпетлевому контрчлену, соответствующая перенормировке квантового поля, пропорциональна уравнению движения и имеет расходимость типа ε^{-2} (ε — параметр размерной регуляризации). В данной статье мы покажем, что учет перенормировки квантового поля необходим и для корректного разделения инфракрасных (ИК) и УФ-расходимостей в высших порядках с помощью добавления к действию инвариантных слагаемых, регуляризующих ИК-расходимости. Как будет видно в дальнейшем, соответствующий вклад имеет сингулярность ε^{-1} и оказывается существенным для полного сокращения неинвариантных контрчленов.

Интерес к исследованию структуры УФ-расходимостей в ДНСМ в значительной степени вызван потребностями теории струн (см. [8] и приведенные там ссылки), которая, имея дело с компактными мировыми поверхностями, свободна от ИК-расходимостей. Однако ввиду независимости УФ-контрчленов (связанных с локальностью взаимодействия) от глобальных свойств мировых поверхностей [9] удобнее реальные вычисления этих контрчленов проводить, считая двумерное пространство плоским и бесконечным [10, 11]. Расплатой за это является проблема ИК-расходимостей, присущая двумерным теориям, заданным на плоском бесконечном пространстве.

Действительно, из выражения для фурье-образа обычного безмассового пропагатора $1/k^2$ в d-мерном (евклидовом) пространстве

$$F_d\left[\frac{1}{k^2}\right] \equiv (2\pi)^{-d}\int d^dk\,\frac{\exp\{ikx\}}{k^2-i0} = (4\pi)^{-d/2}\,\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)(x^2)^{1-d/2} \qquad (1)$$

следует, что пропагатор в координатном представлении при $d=2$ расходится.

Более строгий анализ проблемы [12—14] позволяет выявить причину этой трудности. Дело в том, что безмассовый пропагатор, являющийся решением уравнения

$$k^2D(k)=1, \qquad (2)$$

определен неоднозначно, а именно с точностью до произвольной константы C:

$$D(k)=\frac{1}{k^2}+C\delta^{(d)}(k) \qquad (3)$$

или в координатном представлении

$$D(x)=(4\pi)^{-d/2}\,\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)(x^2)^{1-d/2}+(2\pi)^{-d}C. \qquad (4)$$

При $d>2$ эта константа фиксируется ($C=0$) требованием убывания пропагатора на больших расстояниях, а при $d=2$ существует произвол, которым можно воспользоваться для определения пропагатора, свободного от ИК-расходимостей. В качестве такого пропагатора можно выбрать, например, выражение $D(x)-D(0)$.

Подобное вычитание ИК-сингулярностей есть простейший случай действия так называемой R^*-операции [15, 16], которая дополняет стандартную R-операцию [17] соответствующим вычитанием ИК-расходимостей. В ДНСМ в старших порядках теории возмущений имеет место перекрывание УФ- и ИК-расходимостей, и поэтому R^*-операция в данном случае осуществляется более сложным, чем простое вычитание сингулярности из свободного пропагатора, образом [18].

В большинстве работ, посвященных вычислениям β-функций в различных вариантах ДНСМ, особенно в невысоких порядках теории возмущений, используется, однако, другой способ борьбы с ИК-расходимостями. Сделаем в этом месте небольшое замечание. Разумеется, введение размерной регуляризации ($d=2-2\varepsilon$) регуляризует не только УФ-, но и ИК-расходимости. Однако и те и другие проявляются одинаково — в виде полюсов по ε. Поэтому для разделения этих расходимостей к действию добавляют массовый член (см. ниже).

Чтобы сделать дальнейшие формулы более наглядными, мы ограничимся простым вариантом ДНСМ, а именно: рассмотрим бозонную модель с действием

$$S=\frac{1}{2}\int dxG_{ij}(\varphi)\,\partial_\mu\varphi^i\partial^\mu\varphi^j, \tag{5}$$

полевое многообразие которой есть некоторое локально-симметрическое пространство ($R_{ijkl;n}=0$). Все выводы справедливы и для более сложных случаев. Массовый член поля $\varphi^i(x)$ имеет вид

$$S_m=\frac{m^2}{2}\int dxG_{ij}(\varphi)\,\varphi^i\varphi^j. \tag{6}$$

Указанная добавка к действию носит, разумеется, вспомогательный характер, и после вычисления УФ-контрчленов m следует положить равным нулю.

При вычислении методом фонового поля действие разлагается по степеням квантового поля, роль которого в ДНСМ играет вектор $\xi^i(x)$, касательный к геодезической в точке полевого многообразия с координатой $\Phi^i(x)$ [4].

Однопетлевый расходящийся контрчлен, полученный из (5) и (6), равен

$$\Delta_1S+\Delta_1S_m=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int dx\left\{\frac{1}{2}R_{ij}\partial_\mu\varphi^i\partial^\mu\varphi^j+\frac{m^2}{6}R_{ij}\varphi^i\varphi^j\right\}. \tag{7}$$

Второе слагаемое обращается в нуль при $m\to0$ и в однопетлевом приближении не существенно. Однако оно дает вклад в УФ-контрчлены в следующих порядках из-за появления интегралов, имеющих поведение типа m^{-2}. В результате после снятия ИК-регуляризации ($m\to0$) пропорциональная $1/\varepsilon$ часть двухпетлевого контрчлена кроме известного выражения

$$\frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon}\,\frac{1}{2}\int dxR_{abci}\,R^{abc}{}_j\,\partial_\mu\varphi^i\partial^\mu\varphi^j \tag{8}$$

содержит также неинвариантное слагаемое

$$\frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon}\,\frac{1}{18}\int dxR^{cab}{}_kR_{lc}\varphi^k\varphi^l\left(R_{iabj}+\frac{1}{3}\,\omega_{dia}\omega_{djb}\right)\partial_\mu\varphi^i\partial^\mu\varphi^j, \tag{9}$$

где ω_{dia} — так называемые коэффициенты спиновой связности, не являющиеся ковариантным объектом (об их происхождении см., напр., [4]). Появление неинвариантных контрчленов указывает на некорректность используемого способа разделения возникающих в данном порядке УФ- и ИК-расходимостей.

Выражение (9) получено при использовании ИК-регуляризации (6), которая сама неинвариантна, так как $\varphi^i(x)$, в отличие от $\partial_\mu\varphi^i(x)$, не преобразуется как вектор на полевом многообразии. Поэтому обычно неинвариантными слагаемыми в контрчленах пренебрегают, считая, что если ввести инвариантную ИК-регуляризацию, то такие члены возникать не должны [4]. При этом, однако, остается открытым вопрос о существовании такой регуляризации.

Как мы убедимся прямым вычислением, для того чтобы инвариантным образом разделить ИК- и УФ-расходимости в старших порядках, недостаточно только инвариантности массового члена, а необходимо также, чтобы регуляризация ИК-расходимостей данного порядка проводилась после устранения УФ-расходимостей предыдущих порядков в массовом члене. Действительно, нетрудно видеть, что выбор ИК-регуляризации в простейшем инвариантном виде

$$S_m = \frac{m^2}{2}\int dx G_{ij}(\Phi)\,\xi^i\xi^j \tag{10}$$

(напомним, что $\xi^i(x)$ — вектор на полевом многообразии) приводит к появлению в двухпетлевом контрчлене дополнительных неинвариантных структур:

$$\frac{2}{(4\pi)^2\varepsilon}\int dx\,\frac{1}{36}\,R^{ab}\omega_{cia}\omega^c{}_{jb}\partial_\mu\varphi^i\partial^\mu\varphi^j. \tag{11}$$

При анализе источника происхождения таких членов видно, что они возникают из диаграмм, импульсные интегралы которых сводятся к произведениям вида $m^2I_1I_2$ и $m^4I_1I_3$, где

$$I_\alpha \equiv \int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}(k^2+m^2)^{-\alpha} = (4\pi)^{-d/2}(m^2)^{d/2-\alpha}\,\frac{\Gamma(\alpha-d/2)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{12}$$

Поскольку I_1 имеет УФ-полюс $1/\varepsilon$, а I_2 и I_3 сингулярны в ИК-пределе, то здесь происходит наложение УФ- и ИК-расходимостей друг на друга. Несокращение указанных членов обусловлено тем, что в ИК-сингулярных частях диаграмм не проведено полностью устранения УФ-расходимостей предыдущих порядков.

Обращаясь к примеру применения R^*-операции в ДНСМ [18], можно сделать вывод о том, что член, регуляризующий ИК-расходимости, должен учитывать перенормировку всех УФ-подрасходимостей. Таким выражением является

$$S_m = \frac{m^2}{2}\int dx G^R_{ij}(\Phi)\,\xi^i_R\xi^j_R, \tag{13}$$

где для каждого конкретного порядка теории возмущений в качестве $G^R{}_{ij}$ и $\xi^i{}_R$ подставляются величины, перенормированные с точностью до предыдущего порядка. В частности, для ИК-регуляризации двухпетлевого контрчлена следует положить

$$G^R_{ij} = G_{ij} - \frac{1}{4\pi\varepsilon}R_{ij}, \tag{14}$$

$$\xi^i_R = \xi^i + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{2}{3}\,R^i{}_j\xi^j. \tag{15}$$

Можно убедиться с помощью непосредственных вычислений, что в этом случае происходит полное сокращение неинвариантных слагаемых в двухпетлевом контрчлене. Имея в виду аналогию с R^*-операцией, следует ожидать, что это свойство сохранится во всех порядках теории возмущений.

Таким образом, выражение (13) представляет собой искомую ИК-регуляризацию, обеспечивающую корректное инвариантное разделение ИК- и УФ-расходимостей в ДНСМ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Abbott L.//Nucl. Phys. 1981. **B185**. P. 189. [2] Friedan D.//Ann. Phys. 1985. **163**. P. 318. [3] Honerkamp J.//Nucl. Phys. 1972. **B36**. P. 130. [4] Alvarez-Gaume L., Freedman D. Z., Mukhi S.//Ann. Phys. 1981. **134**. P. 85. [5] Mukhi S.//Nucl. Phys. 1986. **B264**. P. 640. [6] Воронов Б. Л., Тютин И. В.//Ядерная физика. 1981. **33**. С. 1137. [7] Howe P. S., Papadopoulos G., Stelle K. S.//Nucl. Phys. 1988. **B296**. P. 26. [8] Green M., Schwarz J., Witten E. Superstring Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. [9] Keller G., Silvotti R.//Ann. Phys. 1988. **183**. P. 269. [10] Callan C. G., Friedan D. H., Martinec E. J., Perry M. J.//Nucl. Phys. 1985. **B262**. P. 593. [11] Curci G., Paffuti G.//Nucl. Phys. 1987. **B286**. P. 399. [12] David F.//Comm. Math. Phys. 1981. **81**. P. 149. [13] Grignani G., Mintchev M.//Phys. Rev. 1988. **D38**. P. 3163. [14] Miramontes J. L., Sanchez de Santos J. M.//Phys. Lett. 1990. **246B**. P. 399. [15] Chetyrkin K. G., Tkachov F. V.//Phys. Lett. 1982. **114B**. P. 133. [16] Смирнов В. А., Четыркин К. Г.//ТМФ. 1985. **63**. С. 462. [17] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. 4-е изд. М., 1984. [18] Grisaru M. T., Kazakov D. I., Zanon D.//Nucl. Phys. 1987. **B287**. P. 189.

Поступила в редакцию
22.04.91