ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 78, № 3
март, 1989

УЛЬТРАФИОЛЕТОВАЯ КОНЕЧНОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ СИГМА-МОДЕЛЕЙ НА АФФИННО-МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

Белокуров В. В., Тарасов В. Е.

Вычислены двухпетлевые контрчлены нелинейной двумерной бозонной сигма-модели, пространство-мишень которой является произвольным аффинно-метрическим многообразием. Указаны примеры неплоских многообразий, приводящих к ультрафиолетово-конечным сигма-моделям.

В последнее время в связи с разработкой теории струн особый интерес представляет изучение нелинейных двумерных сигма-моделей. Многообразия-мишени ультрафиолетово-конечных сигма-моделей определяют пространства компактифицированных дополнительных измерений [1, 2]. Условие ультрафиолетовой конечности задает уравнения движения струнных мод [3–5].

Действие бозонной сигма-модели имеет вид

$$I(\varphi)=\int d^2x\, G_{ij}(\varphi)\,\partial_\mu\varphi^i\,\partial^\mu\varphi^j, \tag{1}$$

где интегрирование ведется по двумерному пространству Минковского. Поля $\varphi^i(x)$ принимают значения на некотором многообразии M. Обычно предполагается, что M является римановым многообразием со связностью, согласованной с метрикой [6, 7]. В этом случае условие ультрафиолетовой конечности сигма-модели приводит к требованию равенства нулю тензора Римана. Другими словами конечность имеет место лишь для плоских многообразий M.

В данной работе мы рассмотрим в качестве пространства M произвольное аффинно-метрическое многообразие, для которого не предполагается согласованности связности с метрикой. В этом случае связность имеет вид

$$\Gamma^k{}_{ij}=\{^k{}_{ij}\}+D^k{}_{ij}, \tag{2}$$

где $\left\{ {k \atop ij} \right\}=\frac{1}{2}G^{kp}(\partial_j G_{ip}+\partial_i G_{jp}-\partial_p G_{ij})$ — символ Кристоффеля,

$$D^k{}_{ij}=-{}^1/{}_2G^{kp}(K_{ipj}+K_{jpi}-K_{ijp})+2Q_{(ij)}{}^k+Q^k{}_{ij} \tag{3}$$

— дефект связности, $K_{ijl}=\nabla_l G_{ij}$ — тензор неметричности, $Q^k{}_{ij}=\Gamma^k{}_{[ij]}$ — тензор кручения. Для рассматриваемых обычно римановых многообразий [6, 7] выполняются соотношения $K_{ijl}=0$, $Q_{ijl}=0$.

Вычисление контрчленов в сигма-модели удобно проводить методом фонового поля. Как известно, в этом методе действие разлагается по степеням квантового поля

$$\xi^i = \frac{d\lambda^i(t)}{dt}\bigg|_{t=0},$$

где $\lambda^i(t)$ — геодезическая, задаваемая уравнением

$$\frac{d^2\lambda^k}{dt^2} + \Gamma^k{}_{ij}\frac{d\lambda^i}{dt}\frac{d\lambda^j}{dt} = 0.$$

Обратим внимание, что в уравнение для геодезической в рассматриваемом случае входит симметричная часть связности (2). Ковариантное разложение действия (1) по степеням квантового поля отличается от соответствующего разложения для римановых многообразий [7, 8] наличием дополнительных слагаемых

$$(4)\qquad I^{(2)} = \int d^2x\, \{G_{ij}\nabla_\mu\xi^i\nabla^\mu\xi^j + 2G_{ij;\,k}\xi^k\nabla_\mu\xi^i\partial^\mu\varphi^j +$$
$$+ (\overset{s}{\mathcal{R}}_{iklj} + {}^1/{}_2\, G_{ij;\,k;\,l})\,\xi^k\xi^l\partial_\mu\varphi^i\partial^\mu\varphi^j\},$$
$$I^{(3)} = \int d^2x\, \{G_{ij;\,k}\xi^k\nabla_\mu\xi^i\nabla^\mu\xi^j + [{}^4/{}_3\, \overset{s}{\mathcal{R}}_{\underbrace{ikl}j} + G_{ij;\,k;\,l}]\,\xi^k\xi^l\nabla_\mu\xi^i\partial^\mu\varphi^j +$$
$$+ [{}^2/{}_3\, G_{pj;\,k}\overset{s}{\mathcal{R}}{}^p{}_{lmi} + {}^1/{}_3\, \overset{s}{\mathcal{R}}_{iklj;\,m} + {}^1/{}_6\, G_{ij;\,k;\,l;\,m}]\,\xi^k\xi^l\xi^m\partial_\mu\varphi^i\partial^\mu\varphi^j\},$$
$$I^{(4)} = \int d^2x\, \{[{}^1/{}_3\, \overset{s}{\mathcal{R}}_{iklj} + {}^1/{}_2\, G_{ij;\,k;\,l}]\,\xi^k\xi^l\nabla_\mu\xi^i\nabla^\mu\xi^j +$$
$$+ [{}^5/{}_6\, \underbrace{G_{pi;\,k}\overset{s}{\mathcal{R}}{}^p{}_{lmj}} + {}^1/{}_2\, \overset{s}{\mathcal{R}}_{\underbrace{ikl}j;\,m} + {}^1/{}_3\, G_{ij;\,k;\,l;\,m}]\,\xi^k\xi^l\xi^m\nabla_\mu\xi^i\partial^\mu\varphi^j +$$
$$+ [{}^1/{}_3\overset{s}{\mathcal{R}}_{pklj}\overset{s}{\mathcal{R}}{}^p{}_{mni} + {}^1/{}_{12}\, \overset{s}{\mathcal{R}}_{iklj;\,m;\,n} + {}^1/{}_{24}\, G_{ij;\,k;\,l;\,m;\,n} +$$
$$+ {}^5/{}_{12}\, G_{pj;\,k;\,l}\overset{s}{\mathcal{R}}{}^p{}_{nmi} + {}^1/{}_6\, G_{pj;\,k}\overset{s}{\mathcal{R}}{}^p{}_{lmi;\,n}]\,\xi^k\xi^l\xi^m\xi^n\partial_\mu\varphi^i\partial^\mu\varphi^j\}.$$

Здесь введены обозначения

$$\overset{s}{\mathcal{R}}{}^i{}_{jkl} = \mathcal{R}^i{}_{jkl} + 2Q^i{}_{j[k;\,l]} + 2Q^n{}_{j[k|}Q^i{}_{n|l]},$$
$$\mathcal{R}^i{}_{jkl} = 2\partial_{[k|}\Gamma^i{}_{j|l]} + 2\Gamma^i{}_{n[k|}\Gamma^n{}_{j|l]},$$
$$A_{i;\,j} = \nabla_j A_i = \nabla_j A_i + Q^k{}_{ji}A_k,\qquad \nabla_j A_i = \partial_j A_i - \Gamma^k{}_{ji}A_k,$$
$$\nabla_\mu\xi^i = \partial_\mu\xi^i + \Gamma^i{}_{(pj)}\xi^j\partial_\mu\varphi^p,\qquad A_{\underbrace{ijk}} = A_{(i|j|k)} =$$
$$= {}^1/{}_2(A_{ijk} + A_{kji}),\qquad A_{[i|j|k]} = {}^1/{}_2(A_{ijk} - A_{kji}).$$

Получаемые контрчлены в каждом порядке имеют структуру формулы (1) и сводятся к перенормировке метрического тензора G_{ij} [6].

Однопетлевой расходящийся контрчлен равен

$$(5)\qquad T^{(1,\,1)}{}_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\overset{s}{\mathcal{R}}_{(ij)} + \frac{1}{2}G_{ij;\,a;\,a} - 2G_{i[a;\,b]}G_{j[a;\,b]}\right),$$

где $2\mathcal{R}_{ab} = \mathcal{R}_{acdb}G^{cd}$. При вычислении контрчленов мы используем размерную регуляризацию $2\to n = 2 - 2\varepsilon$ и вводим вспомогательный массовый член для устранения инфракрасных расходимостей.

Двухпетлевой расходящийся контрчлен (включая вклад, полученный из разложения выражения (5) до членов, квадратичных по квантовому полю) содержит слагаемые, пропорциональные ε^{-2} и ε^{-1}. Член, пропорциональный ε^{-2}, может быть получен из (5) с помощью полюсных уравнений [7]. Поэтому мы выпишем ответ лишь для коэффициента при простом полюсе:

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad T^{(2,1)}{}_{ij} = \frac{1}{16\pi^2\varepsilon}\Big\{ & \frac{16}{9}\overset{s}{\mathscr{R}}_{i\underbrace{(a[b)c]}_{}}\overset{s}{\mathscr{R}}_{j\underbrace{(a[b)c]}_{}} + \frac{1}{3}\overset{s}{\mathscr{R}}_{i(ab)j}\overset{s}{\mathscr{R}}_{(ab)} - \\
& - {}^{1}/_{3}\,\overset{s}{\mathscr{R}}_{i(ab)j}\overset{s}{\mathscr{R}}_{c(ab)c} - {}^{1}/_{3}\,G_{i(a;\,b);\,j}\,(5\overset{s}{\mathscr{R}}_{(ab)} + \overset{s}{\mathscr{R}}_{c(ab)c}) - \\
& - {}^{1}/_{6}\,G_{ij;\,(a;\,b)}\,(\overset{s}{\mathscr{R}}_{c(ab)c} - 2\overset{s}{\mathscr{R}}_{(ab)}) - {}^{1}/_{2}\,\overset{s}{\mathscr{R}}_{i(ab)j}\,(G_{cc;\,(a;\,b)} + G_{ab;\,c;\,c}) + \\
& + {}^{8}/_{3}\,G_{i[c;\,b];\,a}\overset{s}{\mathscr{R}}_{j\underbrace{(a[b)c]}_{}} - 2G_{ac;\,c;\,b}\overset{s}{\mathscr{R}}_{i(ab)j} + \\
& + {}^{32}/_{3}\,G_{i[p;\,q]}G_{p(b;\,a)}\overset{s}{\mathscr{R}}_{j\underbrace{(a[b)q]}_{}} - {}^{5}/_{2}\,G_{j[a;\,b]}G_{pb;\,(c}\overset{s}{\mathscr{R}}{}^{p}{}_{ca)i} + \\
& + {}^{1}/_{2}\,\overset{s}{\mathscr{R}}_{i(ab)j}\,(8G_{p[q;\,a]}G_{p[q;\,b]} - G_{pq;\,a}G_{pq;\,b} - 4G_{a[p;\,q]}G_{b[p;\,q]}) + \\
& + {}^{4}/_{3}\,\overset{s}{\mathscr{R}}_{\underbrace{c(ab)d}_{}}G_{i[a;\,c]}G_{j[b;\,d]} + {}^{8}/_{9}\,G_{i[d;\,a]}G_{j[d;\,b]}\,(\overset{s}{\mathscr{R}}_{c(ab)c} + {}^{3}/_{4}\,\overset{s}{\mathscr{R}}_{(ab)}) - \\
& - {}^{1}/_{2}\,G_{j[a;\,b]}\,(3\overset{s}{\mathscr{R}}_{b(cc|i;\,|a)} + 4\overset{s}{\mathscr{R}}_{(ai);\,b}) - {}^{8}/_{3}\,G_{a[c;\,b]}\overset{s}{\mathscr{R}}_{i(ab)c;\,j} + \\
& + G_{i[a;\,b]}\,(G_{jb;\,c;\,c;\,a} - G_{jb;\,(c;\,c;\,a)}) - 2G_{a[c;\,b]}G_{ic;\,(a;\,b);\,j} + \\
& + G_{ca;\,b;\,i}G_{ab;\,c;\,j} - {}^{1}/_{2}\,G_{i(a;\,b);\,j}\,(G_{cc;\,(a;\,b)} + 4G_{ac;\,c;\,b}) - \\
& - G_{ij;\,(a;\,b)}G_{ac;\,c;\,b} + 8G_{i[p;\,q]}G_{p(b;\,a)}G_{j[q;\,(a];\,b)} + \\
& + 2G_{i[a;\,c];\,j}G_{cp;\,q}G_{q[p,\,a]} + {}^{1}/_{4}\,G_{ij;\,(p;\,q)}\,(8G_{a[b;\,p]}G_{a[b;\,q]} - G_{ab;\,p}G_{ab;\,q} - \\
& - 4G_{p[a;\,b]}G_{q[a;\,b]}) + 2G_{cd;\,(a;\,b)}G_{i[a;\,c]}G_{j[b;\,d]} + {}^{1}/_{3}\,G_{i[p;\,a]}G_{j[p;\,b]} \times \\
& \times (5G_{ab;\,c;\,c} + 4G_{cc;\,a;\,b}) + 4G_{i(a;\,b);\,j}G_{a[p;\,q]}G_{b[p;\,q]} + \\
& + 8G_{i[a;\,b]}G_{j[c;\,d]}G_{a[c;\,d];\,b} + {}^{16}/_{3}\,G_{i[a;\,b]}G_{j[a;\,c]}G_{(b|p;\,p|;\,c)} + \\
& + {}^{4}/_{3}\,G_{i[a;\,b]}G_{j[a;\,c]}G_{b[p;\,q]}G_{c[p;\,q]} - {}^{5}/_{3}\,G_{i[a;\,b]}G_{j[c;\,d]}\,(G_{ac;\,p}G_{bd;\,p} - \\
& - 4G_{pa;\,c}G_{bd;\,p} + 6G_{pa;\,c}G_{pd;\,b}) + {}^{20}/_{9}\,G_{i[a;\,b]}G_{j[a;\,c]}\,(G_{pc;\,q}G_{qb;\,p} - \\
& - 4G_{pq;\,b}G_{p(q;\,c)} + 2G_{pb;\,q}G_{pc;\,q})\Big\}.
\end{aligned}
$$

Повторяющиеся нижние индексы означают суммирование с тензором ${}^{1}/_{2}G^{ab}$, например

$$B_{aa;\,c}A_c \equiv {}^{1}/_{4}G^{ab}G^{cd}B_{ab;\,c}A_d, \qquad \mathscr{R}_{ab} \equiv {}^{1}/_{2}G^{cd}\mathscr{R}_{acdb}.$$

Легко убедиться, что при переходе к риманову многообразию формулы (5), (6) приводят к известным выражениям [6, 7].

Приведем примеры неплоских многообразий, для которых однопетлевой и двухпетлевой контрчлены (5), (6) обращаются в нуль. В частности, это имеет место при выполнении условий

$$(7)\qquad K_{ijl}=N_{ijl}-2Q_{(ij)l}, \qquad N_{ijl}=K_{(ijl)}, \qquad N_{ijl;\,k}=0, \qquad \overset{s}{\mathscr{R}}_{iklj}=0$$

или

$$(8)\qquad Q_{ijl}=0, \qquad K_{ijl}=K_{(ijl)}, \qquad \mathscr{R}_{iklj}=-{}^{1}/_{2}\nabla_{(k}K_{l)ij}.$$

Тензор Римана $R^{k}{}_{mln}=\partial_l\{^{k}{}_{mn}\}-\partial_n\{^{k}{}_{ml}\}+\{^{k}{}_{pl}\}\{^{p}{}_{mn}\}-\{^{k}{}_{pn}\}\{^{p}{}_{ml}\}$ в этих случаях равен соответственно

$$
\begin{aligned}
R_{iklj} &= {}^{1}/_{2}N_{mi[l|}N^{m}{}_{k|j]} + 2Q_{(mi)[l}N^{m}{}_{|k|j]}, \\
R_{iklj} &= {}^{1}/_{2}\,K^{m}{}_{i[l}K_{j]mk} - {}^{1}/_{2}\,\nabla_{(k}K_{l)ij}.
\end{aligned}
$$

По-видимому, подобно тому как была доказана конечность сигма-модели с членом Весса — Зумино на параллелизуемых многообразиях [9], можно показать, что в каждом порядке теории возмущений ультрафиолетовая конечность сигма-модели на аффинно-метрическом многообразии обеспечивается условием

$$\overset{s}{\mathcal{R}}_{iklj}+{}^1/_2 G_{ij;\,k;\,l}-2G_{i[k;\,a]}G_{j[l;\,a]}=0,$$

частными случаями которого являются условия (7) и (8).

Литература

[1] *Candelas P., Horowitz G., Strominger A., Witten E.* // Nucl. Phys. 1985. V. B258. P. 46–74.
[2] *Nemeschansky D., Yankielowicz S.* // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 620–623.
[3] *Callan C. G., Friedan D., Martinec E. J., Perry M. J.* // Nucl. Phys. 1985. V. B262. P. 593–609.
[4] *Fradkin E. S., Tseytlin A. A.* // Phys. Lett. 1985. V. B158. P. 316–319.
[5] *Sen A.* // Phys. Rev. 1985. V. D32. P. 2102–2112.
[6] *Friedan D. H.* // Ann. Phys. 1985. V. 163. P. 318–319.
[7] *Alvarez-Gaume L., Freedman D. Z., Mukhi S.* // Ann. Phys. 1981. V. 134. P. 85–109.
[8] *Mukhi S.* // Nucl. Phys. 1986. V. B264. P. 640–652.
[9] *Mukhi S.* // Phys. Lett. 1985. V. B162. P. 345–348.

Научно-исследовательский институт
ядерной физики
Московского государственного
университета

Поступила в редакцию
2.II.1988 г.

ULTRAVIOLET FINITENESS OF NONLINEAR TWO-DIMENSIONAL SIGMA MODELS ON AFFINE-METRIC MANIFOLDS

Belokurov V. V., Tarasov V. E.

Two-loop counterterms are calculated in the nonlinear two-dimensional bosonic sigma model for which the target-space is an arbitrary affine-metric manifold. Some examples of nonflat target-manifolds resulting in ultraviolet-finite sigma models are exhibited.