ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 101, № 1
октябрь, 1994

 В.Е. Тарасов

КВАНТОВЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ II. СТРУНА В ИСКРИВЛЕННОМ АФФИННО-МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

В качестве примера диссипативной квантовой теории поля рассматривается замкнутая бозонная струна в искривленном аффинно-метрическом пространстве-времени. Исследуется конформная аномалия следа тензора энергии-импульса для струны на аффинно-метрическом многообразии. Вычисляется двухпетлевая метрическая бета-функция для двумерной нелинейной диссипативной сигма-модели. Указаны примеры неплоских многообразий, приводящих к ультрафиолетово-конечным сигма-моделям.

В работе [1, 2] рассматривалась нелинейная сигма-модель на аффинно-метрическом многообразии и были получены одно- и двухпетлевые контрчлены при простом полюсе, которые отличаются от контрчленов сигма-модели на римановом многообразии [3]. Возникает вопрос о возможности сведения различия контрчленов к переопределению метрики при инфинитезимальной репараметризации многообразия и к нелинейной перенормировке квантовых полей. Легко показать, что слагаемые двухпетлевого контрчлена, обусловленные неметричностью, в общем случае не приводимы к симметричной части ковариантной производной на римановом многообразии от некоторого векторного поля. Кроме того, нелинейная перенормировка квантовых полей дает дополнительные слагаемые в двухпетлевой контрчлен к метрике только при полюсе ε^{-2} и не дает дополнительных членов при простом полюсе [4]. В связи со сказанным встает вопрос о причинах возникновения дополнительных слагаемых в контрчленах к метрике, обусловленных неметричностью, которая отсутствовала в лагранжиане. Для ответа на этот вопрос рассмотрим связь уравнений движения нелинейной одномерной сигма-модели и их геометрической интерпретации.

Известно, что движение классической механической системы в плоском конфигурационном пространстве под действием внешних сил допускает геометрическую интерпретацию. Геометрическое описание позволяет рассматривать это движение как свободное движение пробной частицы в искривленном конфигурационном пространстве. В общем случае движение в поле потенциальных сил эквивалентно свободному движению пробного тела на метрическом (римановом, финслеровом) многообразии, т.е. многообразии метрика и связность которого согласованы. Аналогично движение на метрическом многообразии под действием диссипативных сил эквивалентно движению пробного тела на неметрическом многообразии, т.е. многообразии, метрика и связность которого несогласованы. Остановимся на этом более подробно. Рассмотрим уравнение движения классической системы

$$\frac{du^i}{dt} + Q^i(q,u) = 0, \tag{1}$$

где $u^i = dq^i/dt$, $i = 1, ..., n$. Будем рассматривать уравнения, инвариантные относительно общекоординатных преобразований, и будем считать для простоты $Q^i(q,u)$ однородными функциями второй степени по u. Известно, что для существования функции Лагранжа необходимо и достаточно выполнения условий Гельмгольца. В этом случае существует матричный множитель, после умножения на который уравнение движения представимо в виде уравнения Эйлера–Лагранжа. Отметим, что матричный множитель однозначно фиксируется условием каноничности связи гамильтониана, порождаемого данным лагранжианом, с физической энергией системы [5]. С другой стороны, известно, что задание функции Лагранжа однозначно определяет метрику в $(n+1)$-мерном конфигурационном пространстве [6]. Таким образом, задача решения уравнений движения эквивалентна задаче нахождения геодезической линии на метрическом многообразии. Отметим, что если метрика (не)зависит от направлений, то многообразие является (римановым) финслеровым. На метрических многообразиях естественным образом определяется структура связности, коэффициенты которой являются символами Кристоффеля для заданной метрики. В общем случае условия Гельмгольца, дополненные физическим требованием связи гамильтониана с полной энергией системы [5], не выполняются. Уравнения движения системы в этом случае можно представить как движения на метрическом многообразии с метрикой, определяемой функцией Лагранжа, под действием диссипативных сил $Q^i_d(q,u)$ в виде

$$\frac{du^i}{dt} + Q^i_p(q,u) + Q^i_d(q,u) = (g^{-1})^{ij} D_j L(q,u) + Q^i_d(q,u) = 0,$$

где D_j – оператор Эйлера–Лагранжа, $L(q,u)$ – функция Лагранжа. Многообразия на которых заданы кривые, удовлетворяющие уравнению (1), в общем случае не являются метрическими. Такие многообразия называются пространствами обобщенных путей [12, 13, 14, 15] и допускают естественное определение связности, коэффициенты которой определяются в виде

$$\Gamma^i_{kl}(q,u) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Q^i(q,u)}{\partial u^k \partial u^l}.$$

В пространствах обобщенных путей связность не согласована с метрикой, которая определяется голономной частью функционала (лагранжианом). Отметим, что разность между коэффициентами связности и символами Кристоффеля, построенными по данной метрике, называется тензором дефекта связности. В результате получаем принцип относительности [16] для движения ситемы в поле диссипативных сил. Согласно этому принципу движение тела в метрическом (римановом или финслеровом) пространстве под действием диссипативных сил эквивалентно свободному движению пробного тела на неметрическом многообразии (пространстве обобщенных путей). Для получения уравнений движения и уравнения геодезической линии в неметрическом многообразии можно использовать вариационный принцип Седова [17, 18]. Неголономный функционал при этом определяется тензором дефекта связности [21]. Простейшим примером пространства обобщенных путей является аффинно-метрическое многообразие (пространство путей) [7, 8, 9, 10, 11], связность и метрика которого не зависят от направлений. Таким образом, нелинейная сигма-модель на аффинно-метрическом многообразии эквивалентна нелинейной сигма-модели на римановом многообразии, находящейся в поле диссипативных сил [21]. Поэтому последовательное построение теории струн в искривленном аффинно-метрическом пространстве-времени должно производиться в рамках диссипативной квантовой схемы [19]. Предложенная диссипативная динамика позволяет обьяснить существование неплоских многообразий, приводящих к ультрафиолетово-конечным нелинейным сигма-моделям [1].

В данной статье мы рассмотрим обобщение двумерной нелинейной бозонной сигма-модели [22, 3, 23, 24] и сигма-модельного подхода [26, 25, 27, 28, 30] к квантовой теории струн [29] на случай аффинно-метрического многообразия, предложенное в работах [19, 20] в качестве примера диссипативной квантовой теории. Обсуждается способ получения конформной аномалии следа тензора энергии-импульса [28, 27] для замкнутой бозонной струны на аффинно-метрическом многообразии (то есть в поле диссипативных и недиссипативных безмассовых фоновых полей). Вычисляется двухпетлевая метрическая ренормгрупповая бета-функция [22, 3] для двумерной нелинейной диссипативной бозонной сигма-модели, предложенной в [19]. Полученные результаты сравниваются с ультрафиолетовыми контрчленами, полученными для аффинно-метрической сигма-модели, рассмотреной в работах [1, 2].

Классические уравнения движения замкнутой бозонной струны в искривленном n-мерном аффинно-метрическом пространстве-времени имеют вид

$$\partial_\mu \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu X^i + \left(\left[{}^{\,i}_{kl}\right] + D^i_{kl} \right) \partial_\mu X^k \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu X^l = 0, \tag{2}$$

где $\left[{}^{\,i}_{kl}\right]$ – символы Кристоффеля для метрики $G_{ij}(q)$; $D_{ikl}(X)$ – тензор дефекта связности [32]; $g^{\mu\nu}(x)$ – двумерный метрический тензор. Уравнения движения (2) описывают двумерный геодезический поток на аффинно-метрическом многообразии (двумерный аналог геодезической линии). Известно, что это уравнение нельзя получить из принципа наименьшего действия, если тензор дефекта связности отличен от нуля. Заметим, что уравнение геодезического потока в римановом многообразии можно получить из принципа наименьшего действия, если плотность функции Лагранжа определить в виде

$$L(X) = \frac{1}{2}\, G_{kl}(X) \partial_\mu X^k \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu X^l. \tag{3}$$

Для задания системы, описываемой уравнениями (2), необходимо помимо действия определить неголономный функционал. В этом случае уравнения движения (2) можно получить из вариационного принципа Седова [17, 18, 21], обобщающего принцип наименьшего действия на диссипативные процессы. Зададим вариацию неголономного функционала в следующем виде:

$$\delta \tilde{W} = -\int d^2x\; D_{ikl}(X)\; \partial_\mu X^k \sqrt{g} g^{\mu\nu} \partial_\nu X^l \;\delta X^i. \tag{4}$$

Тогда уравнение геодезического потока получается из принципа Седова, если плотность лагранжиана и неголономный функционал заданы в виде (3) и (4).

Мировая поверхность, заметаемая струной в процессе движения, описывается отображением $X(x)$ из двумерного параметрического пространства N в n-мерное пространственно-временное многообразие M, т.е. $X(x) : N \to M$. Пусть двумерный параметр задается в виде $x = (\tau, \sigma)$ и отображение $X(x)$ задается пространственно-временными координатами $X^k(x)$. Выберем голономный функционал в виде

$$S(X) = S(G, \Phi, g) = \frac{1}{2} \int d^2x \; (\; L(X) \; + \; \frac{\alpha'}{2} \sqrt{g} R^{(2)}(g) \; \Phi(X), \tag{5}$$

где α' – обратная напряженность струны; $\Phi(X)$ – поле дилатона. Действие (5) и седовиан, определенный вариационным уравнением (4), описывают замкнутую бозонную струну, распространяющуюся в безмассовых диссипативных и недиссипативных фоновых полях или в искривленном аффинно-метрическом пространстве-времени. Для простоты член Весса–Зумино рассматриваться не будет [33]. Выберем параметризацию для двумерного метрического тензора $g^{\mu\nu}$ в следующем виде [31]:

$$g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = c(x) \; (\; n^2(x)(d\tau)^2 - (\; d\sigma + m(x) d\tau)^2 \;). \tag{6}$$

В этом случае плотности гамильтониана без поля дилатона, седовиана и омега переписываются в виде

$$h \; = \; - \frac{n}{2} \; G^{kl}(X) \Pi_k \Pi_l \; + \; m \, \Pi_k X'^k \; - \; \frac{n}{2} \; G_{kl}(X) X'^k X'^l, \tag{7}$$

$$w \; = \; \frac{n}{2} \; (\Delta_1^{kl} \Pi_k \Pi_l \; + \; \Delta^2_{kl} X'^k X'^l) \; ; \;\; \Omega \; = \; 2n \; D^k(X) \Pi_k, \tag{8}$$

где $D^k(X) \equiv D^k_{ij}(X) \; G^{ij}(X)$; $X'^k \equiv (dX^k)/(d\sigma)$; Π_k – канонический импульс; Δ – тензорные интегральные операторы, которые можно условно записать в форме многократных неопределенных интегралов по δX^k :

$$\Delta_1^{kl} = 2 \int \delta X^i D_i^{kl}(X) \;\; \Delta^2_{kl} = -2 \int \delta X^i D_{ikl}(X). \tag{9}$$

К сожалению, мы не имеем строгого математического определения этих операторов. Указанной трудности можно избежать, рассматривая разложение неголономного функционала методом фонового поля в виде степенного ряда по ковариантным полям $\xi^k(x)$, которые являются касательными векторами к геодезической линии, соединяющей X_0^k и $X^k = X_0^k + f^k(X_0, \xi)$. Ковариантное фоново-полевое разложение Δ-оператора записывается в виде

$$\Delta_1^{kl} = 2 \; D_i^{kl}(X_0) \, \xi^i + \; O(\xi^2) \;\; , \qquad \Delta^2_{kl} = -2 \; D_{ikl}(X_0) \, \xi^i + \; O(\xi^2). \tag{10}$$

Ковариантный метод фонового поля [3, 1, 20] в фазовом пространстве определяется разложением только координат $X^k(x)$. Заметим, что модель, определенная (4) (и (5)) в конформной калибровке $n = 1, m = 0$, называется двумерной нелинейной (диссипативной) сигма-моделью. Определим производящий функционал для связных функциий Грина [39, 38, 4] в виде

$$W(J, g) = -i\hbar \ln \int DX D\Pi \exp \frac{i}{\hbar} \int d^2x \; (Z_1(X, \Pi, g) + Z_2(X, J)), \tag{11}$$

где

$$Z_1(X, \Pi, g) \equiv \Pi_k \frac{d}{d\tau} X^k - h + w + \frac{i\hbar}{2} \Omega + \frac{\alpha'}{2} \sqrt{g} R^{(2)}(g) \Phi(X), \tag{12}$$

а $Z_2(X,J)$ – член с источником, вид которого обсуждается в [34, 35, 4, 36, 37, 38]. Получив ковариантное разложение методом фонового поля для Z_1, Z_2 , определим новый производящий функционал $W(X_0,g,J)$ в следующем виде:

$$\exp\frac{i}{\hbar}(\ W(X_0,g,J)+\tilde{W}(X_0)\ ) = \int D\xi D\Pi \exp\frac{i}{\hbar}\int d^2x(\ Z_1(X(X_0,\xi),\Pi,g)+J_k(x)\xi^k(x)\ ). \tag{13}$$

Функциональный интеграл по импульсу П является гауссовым интегралом. Легко получить производящий функционал в форме интеграла по путям:

$$W(X_0,g,J) = -i\hbar\ \ln\int D\xi\ \exp\frac{i}{\hbar}(\ A(X(X_0,\xi))\ +\ M(X(X_0,\xi))\ ). \tag{14}$$

Эффективное действие $A(X)$ записывается в следующем виде [19, 20]:

$$A(X) = S(G,\Phi,g)+S(D,g),$$

где

$$S(D,g) = S_1(D,g)+S_2(D,g)+S_3(D,g), \tag{15}$$

$$S_1 = -\int d^2x\ \frac{1}{2}\Delta^2_{kl}\partial_\mu X^k\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\nu X^l\ = -\tilde{W}(X), \tag{16}$$

$$S_2 = \int d^2x\ \frac{1}{2}F_{kl}(X)\partial_\mu X^k\sqrt{g}\kappa^{\mu\nu}\partial_\nu X^l, \tag{17}$$

$$S_3 = \int d^2x\sqrt{g}(V_{k\mu}g^{\mu\nu}\partial_\nu X^k + B(X)), \tag{18}$$

$$F_{kl} = [G^{-1}+\Delta_1]^{-1}{}_{kl} - [G+\Delta^2]_{kl} = 4D_i{}^n{}_k D_{jnl}\xi^i\xi^j + O(\xi^3), \tag{19}$$

$$V_{k\mu} \equiv \frac{1}{2}g_{\mu\nu}k^\nu[G^{-1}+\Delta^1]^{-1}{}_{kl}D^l(X), \tag{20}$$

$$B(X) \equiv \frac{1}{2}c^{-1}(x)[G^{-1}+\Delta^1]^{-1}_{kl}D^k(X)D^l(X), \tag{21}$$

$$k^\mu = (k^\tau,k^\sigma) = (-2ic^{-1}, 2imc^{-1}), \tag{22}$$

$$\kappa^{\mu\nu} = (\kappa^{\tau\tau},\kappa^{\tau\sigma},\kappa^{\sigma\sigma}) = (-n^{-2}c^{-1}, mn^{-2}c^{-1}, -m^2n^{-2}c^{-1}) \tag{23}$$

и $D^l(X) = G^{lk}G^{ij}D_{kij}(X)$. Заметим, что эффективное действие конформно-инвариантно, поскольку не зависит от $c(x)$, и параметризация двумерных тензоров $\kappa^{\mu\nu}$ и k^μ связана с параметризацией двумерного метрического тензора $g^{\mu\nu}$, т.е. $\kappa^{\mu\nu} = \kappa^{\mu\nu}(g)$ и $k^\mu = k^\nu(g)$. Слагаемое $M(X)$ задается в виде

$$M(X)\ =\ \int d^2x\ \frac{i\hbar}{2}\ \delta(0)\ \ln\det(G^{-1}(X)+\Delta_1(X))^{-1}\ ). \tag{24}$$

Тензор энергии-импульса определяется, как обычно [28, 27, 41], в виде

$$T^{\mu\nu}(x) = -\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}S(G,\Phi,g). \tag{25}$$

В общем случае слагаемые $S(D,g)$ являются неголономными объектами. Так как мы используем ковариантный метод фонового поля [3, 7, 19, 1], то эти объекты представляют степенные ряды по векторному полю $\xi^k(x)$. Отметим, что разложение методом фонового поля и вариация по двумерному метрическому тензору являются некоммутирующими операциями для неголономного функционала, т.е. $(\delta\tilde{W}(X))/(\delta g^{\mu\nu}) = 0$ и $(\delta\tilde{W}(X_0,\xi))/(\delta g^{\mu\nu}) \not\equiv 0$. Поэтому значение вакуумного ожидания тензора энергии-импульса [41]

$$\langle T^{\mu\nu}(x)\rangle \equiv N\exp\left(-\frac{i}{\hbar}W(J,g)\right)\int D\xi\; T^{\mu\nu}(x)\;\exp\frac{i}{\hbar}(A(X)+M(X)) \tag{26}$$

нельзя записать в виде $(-2)/(\sqrt{g})(\delta W(J,g))/(\delta g_{\mu\nu})$, что обусловлено рассмотрением неголономного функционала лишь в рамках фоново-полевого разложения (в противном случае необходимо получить формулы гауссова интегрирования по импульсам в функциональном интеграле для тензорных интегральных операторов Δ вне рамок фоново-полевого метода). Определим двуметрический производящий функционал:

$$W(g^{\mu\nu},a^{\mu\nu},X_0,J) \equiv -i\hbar\,\ln\int D\xi\exp\frac{i}{\hbar}\Bigg(S(G,\Phi,g^{\mu\nu})+ \\ +S(D,a^{\mu\nu})+M(X)+\int d^2xJ_k\xi^k\Bigg).$$

Обычный функционал $W(g,X_0,J)$ легко получить: $W(g,X_0,J) = W(g,a,X_0,J)_{g=a}$. Значение вакуумного ожидания (26) можно записать в виде

$$\langle T^{\mu\nu}(x)\rangle = \left[-\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}W(g,a,X_0,J)\right]_{g=a}. \tag{27}$$

Легко получить конформную аномалию следа тензора энергии-импульса [28] для струны в искривленном аффинно-метрическом пространстве-времени:

$$\langle T^{\mu}_{\mu}\rangle = \frac{1}{2}\,\tilde{\beta}^G_{kl}\,\partial^\mu X^k_0\partial_\mu X^l_0 + \frac{\alpha'}{2}\,R^{(2)}(g)\,\tilde{\beta}^\Phi\,, \tag{28}$$

где

$$\tilde{\beta}^G_{kl} = \bar{\beta}^G_{kl} + \ldots\,;\quad \tilde{\beta}^\Phi = \bar{\beta}^\Phi - \frac{1}{4}\bar{\beta}^G_{ij}\,(\,G^{ij} + \ldots), \tag{29}$$

$$\bar{\beta}^G_{kl} = \beta^G_{kl} + 2\alpha'\,\hat{\nabla}_k\hat{\nabla}_l\Phi\,;\quad \bar{\beta}^\Phi = \beta^\Phi + \alpha'\hat{\nabla}_k\Phi\hat{\nabla}^k\Phi, \tag{30}$$

$$\beta^G_{kl} = \mu\frac{d}{d\mu}G^{ren}_{kl}\,;\ \hat{\nabla}_kV_l \equiv \partial_kV_l - (\,[{}^{\,i}_{kl}] + D^i_{(kl)}\,)\,V_i. \tag{31}$$

Закон изменения тензора энергии-импульса можно записать в виде

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = D_{ikl}(X)\,\partial_\mu X^k g^{\mu\nu}\partial_\nu X^l\,\partial_\nu X^i. \tag{32}$$

Если принять во внимание ковариантное фоново-полевое разложение [3, 1] для $\partial_\mu X^k = C^k_l(X_0,\xi)\,\partial_\mu X^l_0$, то вакуумное ожидание для этого закона может быть записано в форме

$$\langle\nabla^\mu T_{\mu\nu}\rangle = \Big\langle\frac{\delta W(X_0,\xi)}{\delta X^k_0}\Big\rangle\partial_\nu X^k_0. \tag{33}$$

Выберем, как обычно, следующее решение классических уравнений движения: $X_0^k(x) = \mathrm{const}$. Тогда уравнение (32) перепишется в обычном виде [27, 41]: $\langle \nabla^\mu T_{\mu\nu} \rangle = 0$. Легко получить, что центральный заряд алгебры Вирасоро [44] пропорционален дилатонной β-функции, аналогично недиссипативному случаю [27]. Достаточным условием законности этого соотношения [27] является $\tilde{\beta}^\Phi = \mathrm{const}$ и $\tilde{\beta}^G_{kl} = 0$, где $\tilde{\beta}^G$ определяется метрической бета-функцией двумерной нелинейной диссипативной сигма-модели. При вычислении двухпетлевой метрической бета-функции мы использовали аффинно-метрический метод фонового поля [7, 8, 9, 10, 11, 1, 2], вводили вспомогательный массовый член [45, 46], размерную регуляризацию $2 \to n = 2-2\varepsilon$ [43, 42] и минимальное вычитание с общим предписанием для свертки двумерного каппа-тензора $\kappa^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = f(n)$, где $f(n) = 1+f_1\varepsilon+O(\varepsilon^2)$ и $\eta_{\mu\nu}$ являются двумерной метрикой Минковского. Различные предписания, видимо, соответствуют различным ренормализационным схемам, и результаты должны быть связаны через переопределение констант связи G_{kl} и F_{kl} по аналогии с римановой двумерной нелинейной сигма-моделью с членом Весса–Зумино [48]. Известно, что пропагатор квантовых полей $\xi^k(x)$ не имеет стандартного вида. Поэтому необходимо вводить m векторов $e^a_k(X)$ и опердeлить поле $\xi^a(x) = e^a_k \xi^k(x)$, где $\hat{\nabla}_k e^a_l = 0$. После этой модификации кинетический член принимает вид $\hat{\nabla}_\mu \xi^a \hat{\nabla}_\nu \xi^a$, где $\hat{\nabla}_\mu \xi^a = \partial_\mu \xi^a + \hat{\Lambda}^a_{bc}\, e^b_k\, \partial_\mu X^k_0\, \xi^c$. Эта смешанная производная [47] для аффинно-метрического многообразия M и пространства Минковского N включает связность Схоутена–Врэнчану [49, 50, 51] $\hat{\Lambda}_{abc}$, которая является на римановых многообразиях коэффициентами вращения Риччи [52], а объект $\omega^a_{kb} \equiv \hat{\Lambda}^a_{bc} e^b_k$ является спиновой связностью [27]. Заметим, что в дополнение к вкладам, учтенным в [19, 20], необходимо рассматривать диаграммы, внешнии фоново-полевые линии которых включают связность Схоутена–Врэнчану. Такие диаграммы не сокращаются [21] в отличие от случая римановой нелинейной сигма-модели [27]. Это обусловленно следующим соотношением: $\hat{\Lambda}_{(a/b/c)} = (-1/2)(K_{ijl}+2Q_{(ij)l})\, e^i_a e^j_c e^l_b$, где K_{ijl} – тензор неметричности аффинно-метрического многообразия, а Q^k_{ij} – тензор кручения. Двухпетлевая метрическая бета-функция диссипативной сигма-модели представима в виде $\beta^G = \beta^G_{AM} + \beta^G_1 + \beta^G_2$, где β^G_{AM} – метрическая бета-функция [22, 3] аффинно-метрической сигма-модели, определенной в [1, 2]. β^G_{AM} – часть метрической бета-функции, полученной только из действия $S(G, \Phi, g)$, в котором двумерная метрика является метрикой Минковского. β^G_K $K = 1, 2$ – часть метрической бета-функции, полученной с учетом действий $S_K(D, g)$, определенных в уравнениях (15)–(23). Заметим, что двухпетлевая метрическая бета-функция β^G_3 равна нулю. Это аналогично результатам для нелинейной сигма-модели, рассмотренной в [53, 54, 55]. Полное выражение двухпетлевых ультрафиолетовых контрчленов очень громоздко, но легко можно получить следующие условия ультрафиолетовой конечности. Однопетлевые и двухпетлевые контрчлены двумерной нелинейной диссипативной сигма-модели исчезают, если согласование между аффинной связностью и метрической структурой на многообразии задается следующим образом [19]:

$$\nabla_k G_{ij} = N_{ijk} = N_{(ijk)}; \qquad \hat{\nabla}_{(l} N_{k)ij} = N^p_{i(k} N_{l)jp}; \tag{34}$$

$$Q_{(ij)l} = 0; \qquad \hat{R}_{(k/(ij)/l)} = \frac{1}{4}\, N^p_{(k/(i} N_{j)/l)p}.$$

Видно, что условия ультрафиолетовой конечности не содержат зависимости от параметра f_1. Заметим, что бета-функция аффинно-метрической сигма-модели равна нулю во всех петлях, если аффинно-метрическое многообразие с тензором неметричности K_{ijl} и кручением Q^i_{kl} определяется так [21]:

$$\hat{R}_{kijl} \equiv R_{kijl} - 2\hat{\nabla}_{[j/}Q_{ki/l]} - 2Q^n_{i[l/}Q_{kn/j]} = 0, \tag{35}$$

$$\hat{\nabla}_k G_{ij} = K_{ijk} - 2Q_{(ij)k} = 0. \tag{36}$$

Легко видеть, что эти аффинно-метрические многообразия не являются плоскими.

В заключение хотелось бы выразить благодарность В.В. Белокурову и К.С. Стеллу за полезные обсуждения и всем сотрудникам отдела теоретической физики высоких энергий Института ядерной физики им.Скобельцина Московского государственного университета за поддержку во время работы.

Список литературы

[1] *Белокуров В.В., Тарасов В.Е.* // ТМФ. 1989. Т.78. № 3. С.471-474.
[2] *Belokurov V.V., Tarasov V.E.* Preprint ICTP. IC-90-168. Trieste, 1990. P.1-22.
[3] *Alvarez-Gaume L.,Freedman D.Z., Mukhi S.* // Ann. Phys. 1981. V.134. P.85-109.
[4] *Howe P.S., Papadopoulos G., Stelle K.S.* // Nucl. Phys. 1988. V.B296. P.26-48.
[5] *Edvards I.K.* // Amer. J. Phys. 1979. V.47. № 2. P.153-155.
[6] *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965.
[7] *Veblen O.* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1922. V.8. P.192-197.
[8] *Veblen O., Thomas T.Y.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1923. V.25. P.551-608; V.26. P.373.
[9] *Веблен О.* Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: ГИИЛ, 1948.
[10] *Hlavaty V.* // Ann. Soc. Polon. 1926. V.5. P.44-62; Mem. Sci. Mathem. Paris. 1934. V.63. P.1-72.
[11] *Thomas T.Y.* Differential Invariants of the Generalized Spaces. Cambridge, 1934.
[12] *Douglas J.* // Ann. Math. 1928. V.29. № 2. P.143-168.
[13] *Knebelman M.S.* // Amer. J. Math. 1929. V.51. P.527-564.
[14] *Kosambi D.D.* // C.R. Acad. Sci. Paris. 1938. V.206. P.1538-1541.
[15] *Bortolotti E.*// Atti Acad. Naz. Lincei. Rend. (6). 1936. V.23. P.16-21;104-110;175-180.
[16] *Коноплева Н.П., Попов В.Н.* Калибровочные поля. М.: Атомиздат, 1980.
[17] *Седов Л.И.* // Прикл. мат. и мех. 1968. Т.32. № 5. С.771-785.
[18] *Седов Л.И., Цыпкин А.Г.* Принципы макроскопическои теории гравитации и электромагнетизма. М.: Наука, 1989.
[19] *Tarasov V.E.* Dissipative Quantum Dynamics and Nonlinear Sigma-Model. Preprint of Nucl. Phys. Inst. of Moscow St. Univ. 92-33/282. Moscow, 1992.
[20] *Tarasov V.E.* // Proc. 7th Inter. Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory. (Sochi, 7-14 October,1992) ЯФ. 1993. Т.56. № 11. С.269-276.
[21] *Тарасов В.Е.* // Актуальные проблемы фундаментальных наук: тезисы докладов. Т.3. М.: Изд. МГТУ, 1991. С.62-64.
[22] *Friedan D.* // Phys. Rev. Lett. 1980. V.45. № 13. P.1057-1060; Ann.of Phys. 1985. V.163. № 2. P.318-419.
[23] *Abbot L.F.* // Nucl. Phys. 1981. V.B185. № 1. P.189-203.
[24] *Braaden E., Curtright T.L., Zachos C.K.* // Nucl. Phys. 1985. V.B260. № 3/4. P.630-688.
[25] *Lovelace C.* // Phys. Lett. 1984. V.B135. № 1/3. P.75-77.
[26] *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* // Phys. Lett. 1985. V.B160. № 1/3. P.69; Nucl. Phys. 1985. V.B261. № 1. P.1-27.
[27] *De Alwis S.P.* // Phys. Rev. 1986. V.D34. № 12. P.3760-3767.
[28] *Shore G.M.* // Nucl. Phys. 1987. V.B286. № 2. P.346-377.
[29] *Грин М., Шварц Дж., Виттен Э.* Теория суперструн. М.: Мир, 1990.
[30] *Maeno M., Savada S.* // Nucl. Phys. 1988. V.B306. № 3. P.603-629.
[31] *Akhoury R., Okada Y.* // Phys. Rev. 1987. V.D35. P.1917-1933.
[32] *Схоутен И.А. Стройк Д.Дж.* Новые методы дифференциальной геометрии. Т.1. М.-Л.: ГОНТИ, 1939.
[33] *Mukhi S.* // Phys. Lett. 1985. V.B162. P.345-348; Nucl. Phys. 1986. V.B264. P.640-652.
[34] *Camblong H.E., Ordonez C.R.* Preprint UTTG-08-90. 13P.

[35] *Howe P.S., Stelle K.S.* Preprint CERN PH-51-36/88.
[36] *Ellicot P., Toms D.J.* // Nucl. Phys. 1989. V.B312. № 3. P.700-714.
[37] *Vilkovisky G.A.* // Nucl. Phys. 1984. V.B234. P.125.
[38] *Де Витт Б.С.* Динамическая теория групп и полей. М.: Мир, 1987.
[39] *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. 4-е. изд. М.: Наука, 1984.
[40] *Биррелл Н., Девис П.* Квантовые поля в искривленном пространстве-времени. М.: Мир, 1984.
[41] *Jain S.* // Int. J. Mod. Phys. 1988. V.A3. № 8. P.1759-1846.
[42] *Speer E.R., Westwater M.J.* // Ann. Inst. Henri Poincare. 1971. V.A14. P.1.
[43] *t'Hooft G., Veltman M.* // Nucl. Phys. 1972. V.B44. P.189.
[44] *Belavin A.A., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B.* // Nucl. Phys. 1984. V.B241. P.333-380.
[45] *Tseytlin A.A.* // Int. J. Mod. Phys. 1989. V.A4. P.1257.
[46] *Белокуров В.В., Тарасов В.Е.* // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика. 1991. Т.32. № 6. P.14-18.
[47] *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. 2-е изд. М.: Наука, 1976.
[48] *Metsaev R.R., Tseytlin A.A.* // Nucl. Phys. 1987. V.B293. P.385-419.
[49] *Schouten J.A.* // Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Proceeding of Sciences. 1928. V.31. № 3. P.291-299.
[50] *Vranceanu G.* // Rend. Acc. Linc. 1926. V.4. № 6. P.508-511.
[51] *Vranceanu G.* // Atti del Congresso Internaz. del Math. di Bologna. 1928. № 6. P.61-67.
[52] *Chandrasekhar S.* The Mathematical Theory of Black Holes. Oxford. 1983.
[53] *Osborn H.* // Nucl. Phys. 1987. V.B294. № 2. P.595-620.
[54] *Jack I., Jones D.R.T., Ross D.A.* // Nucl. Phys. 1988. V.B307. № 3. P.531-548.
[55] *Jack I., Jones D.R.T., Mohammedi N.* // Nucl. Phys. 1989. V.B322. № 2. P.431-470.

Научно-исследовательский институт
ядерной физики
Московского государственного университета

Поступила в редакцию
25.V.1993 г.

V.E. Tarasov

**QUANTUM DISSIPATIVE SYSTEMS
II. STRING IN CURVED AFFINE-METRIC
SPACE-TIME**

As the example of the dissipative quantum theory we consider the closed bosonic string in the curved affine-metric space-time. The conformal anomaly of the energy momentum tensor trace for the string on the affine-metric manifold is investigated. The two-loop metric beta-function for the two-dimensional nonlinear dissipative sigma-model is calculaded. Some examples of the nonflat manifolds resulting in ultraviolet-finite sigma-models are exibited.