ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 110, № 1
январь, 1997

В. Е. Тарасов*

КВАНТОВЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ. III. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА

Исходя из требования самосогласованности квантового описания диссипативных (негамильтоновых) систем, сформулированного как отсутствие противоречия между уравнениями эволюции квантовых диссипативных систем и квантовыми коммутационными соотношениями, мы показали, что оператор, описывающий эволюцию квантовой диссипативной системы, должен нарушать тождество Якоби. Таким образом, требование самосогласованности ведет к необходимости выхода за рамки алгебр Ли. Следовательно, для описания квантовых диссипативных систем необходимо использовать антикоммутативные нелиевы алгебры.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для решения проблем квантового описания диссипативных систем в первой части данной работы [1] было предложено использовать антикоммутативную нелиеву алгебру, содержащую алгебру Ли в качестве своей подалгебры.

Отметим, что необходимость выхода за рамки алгебр Ли при описании квантовых диссипативных систем обусловлена проблемами, возникающими при построении самосогласованного описания таких систем. Одна из проблем связана с несовместностью квантовых коммутационных соотношений и уравнений движения квантовой диссипативной системы. Приведем простейший пример такой несовместности.

Квантовые коммутационные соотношения

$$[a, a^\dagger] = 1, \qquad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

несовместны с квантовыми уравнениями Ланжевена [2]

$$\dot{a} = (-\imath\alpha - \beta)a + f(t), \qquad \dot{a}^\dagger = (\imath\alpha - \beta)a^\dagger + f(t)^\dagger,$$

где точкой обозначена производная по времени, а β – коэффициент, описывающий диссипацию (затухание) в системе. Взяв коммутаторы от уравнений Ланжевена, получаем

$$[\dot{a}, a^\dagger] + [a, \dot{a}^\dagger] = -2\beta.$$

*НИИ ядерной физики Московского государственного университета,
e-mail:TARASOV@THEORY.NPI.MSU.SU

С другой стороны, проведя дифференцирование по времени первого из квантовых коммутационных соотношений и используя правило Лейбница, приходим к тождеству

$$[\dot{a}, a^{\dagger}] + [a, \dot{a}^{\dagger}] = 0.$$

Видно, что квантовые коммутационные соотношения и уравнения эволюции системы совместны лишь при условии, что система не является диссипативной ($\beta = 0$).

Один из способов решения проблем квантового описания диссипативных систем, предложенный в работах [1, 3], заключается в пополнении алгебры Гейзенберга–Вейля некоторым неассоциативным оператором W. В [1] были получены основные свойства и коммутационные соотношения, которым должен удовлетворять оператор W. При этом оказалось, что для выполнения всех полученных коммутационных соотношений оператор W должен быть неассоциативным, нелиевым (не удовлетворяющим тождеству Якоби) оператором. Вследствие неассоциативности и нелиевости оператора W, описывающего эволюцию квантовой диссипативной системы, действие полной производной по времени на произведение и коммутатор ассоциативных операторов не удовлетворяет правилу почленного дифференцирования (правилу Лейбница), при этом правило Лейбница деформируется за счет возникновения ассоциатора и алгебраического якобиана оператора W, соответственно. Это приводит к снятию противоречия между квантовыми уравнениями движения диссипативных систем и каноническими коммутационными соотношениями алгебры Гейзенберга–Вейля.

Кроме этого в работах [1, 3] предложено обобщение уравнения эволюции состояния системы (уравнения фон Неймана), которое в отличие от других предлагаемых уравнений является квантовым аналогом классического уравнения Лиувилля для диссипативных систем и тем самым удовлетворяет принципу соответствия.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ И НЕОБХОДИМОСТЬ ВЫХОДА ЗА РАМКИ АЛГЕБР ЛИ

Рассмотрим более подробно причины, приводящие к необходимости выхода за рамки алгебр Ли при построении динамического описания квантовых диссипативных систем, а для этого получим определение квантовых диссипативных систем.

2.1. Классическая диссипативная система. Уравнение эволюции динамической системы с конечным числом степеней свободы имеет вид

$$\frac{dX_k}{dt} = F_k(X). \tag{1}$$

При этом система называется **диссипативной**, если хотя бы одно из выражений

$$\Omega_{kl} = \frac{\partial F_k}{\partial X_l} - \frac{\partial F_l}{\partial X_k} \tag{2}$$

отлично от нуля, и консервативной, если все $\Omega_{kl} = 0$.

Пусть эволюция механической системы во времени в фазовом пространстве обобщенных координат q_k и импульсов p_k задается системой из $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, имеющей вид

$$\frac{dq_k}{dt} = -G_k(t, q, p), \qquad \frac{dp_k}{dt} = F_k(t, q, p). \tag{3}$$

Механическая система называется **гамильтоновой**, если правые части уравнений (3) удовлетворяют условиям

$$\Omega^s{}_{kl}(t,q,p) = 0, \tag{4}$$

где $s = 1,2,3;\ k,l = 1,\ldots,n$, и

$$\Omega^1{}_{kl} = \frac{\partial G_l}{\partial p_k} - \frac{\partial G_k}{\partial p_l}, \qquad \Omega^2{}_{kl} = \frac{\partial G_k}{\partial q_l} - \frac{\partial F_l}{\partial p_k}, \qquad \Omega^3{}_{kl} = \frac{\partial F_l}{\partial q_k} - \frac{\partial F_k}{\partial q_l}. \tag{5}$$

В этом случае уравнения движения системы (3) представимы в виде канонических уравнений Гамильтона и полностью характеризуются гамильтонианом системы h. Уравнения (4), (5) являются аналогом условий Гельмгольца [4] в фазовом пространстве для дифференциальных уравнений (3).

Отметим, что уравнения (3) можно получить из принципа стационарности действия тогда и только тогда, когда выполняются условия (4), (5). При выполнении этих условий уравнения (3) допускают вариационную формулировку в классе голономных функционалов, называемых действием по Гамильтону, множество критических точек которого совпадает со множеством решений канонических уравнений Гамильтона. Таким образом, уравнения (3) допускают вариационный принцип стационарности действия Гамильтона при довольно жестких ограничениях (4) на структуру правой части.

Если уравнения эволюции (3) системы таковы, что правые части этих уравнений не удовлетворяют хотя бы одному из условий (4) (и следовательно, уравнения нельзя получить из принципа стационарности голономного функционала), то динамическая система называется **диссипативной** или **негамильтоновой**.

Для того чтобы перенести определение диссипативной системы в квантовую теорию, необходимо записать уравнения движения и условия негамильтоновости (диссипативности), используя скобки Пуассона:

$$\{A,B\} = \frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial B}{\partial q_k}\frac{\partial A}{\partial p_k}. \tag{6}$$

Рассмотрим динамическую систему, в которой уравнения эволюции имеют вид

$$\frac{dq_k}{dt} = \{q_k, h\} - G_k(t,q,p), \qquad \frac{dp_k}{dt} = \{p_k, h\} + F_k(t,q,p). \tag{7}$$

Используя скобку Пуассона (6), выражения (5) можно записать в виде

$$\Omega^1{}_{kl} = \{q_k, G_l\} - \{q_l, G_k\}, \qquad \Omega^2{}_{kl} = \{G_k, p_l\} - \{q_k, F_l\}, \tag{8}$$

$$\Omega^3{}_{kl} = \{p_l, F_k\} - \{p_k, F_l\}. \tag{9}$$

Таким образом, можно сформулировать следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Динамическая система, эволюция которой задается уравнениями (7) или (3), называется **диссипативной (негамильтоновой)**, если хотя бы одно из выражений (8), (9) отлично от нуля.

Удобно ограничиться рассмотрением диссипативных систем, для которых $G_k = 0$. Это условие не только значительно упрощает многие соотношения, но и необходимо по физическим соображениям для "связи гамильтониана $h(t,q,p)$ с энергией системы" [5]. Отметим, что величины $F_k(t,q,p)$ с физической точки зрения описывают диссипативную силу, действующую на механическую систему. В простейшем случае, соответствующем линейной зависимости диссипативных сил (сил сопротивления) от скорости, они имеют вид $F_k(t,q,p) = \kappa p_k$, где κ – коэффициент, описывающий диссипацию в системе.

Уравнение эволюции наблюдаемой величины A, являющейся функцией обобщенных координат q_k и импульсов p_k, для диссипативной системы имеет вид

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, h\} + D_0(A), \tag{10}$$

где

$$D_0(A) = \left(F_k \frac{\partial A}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial q_k} G_k \right).$$

Отметим, что для диссипативной системы оператор $D_0(A)$ нельзя представить в виде $\{A, h'\}$, где h' – некоторая функция от обобщенных координат и импульсов.

2.2. Квантовая диссипативная система. Эволюция квантовой системы во времени определяется соотношением

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[H, A], \tag{11}$$

где H – некоторый самосопряженный ассоциативный оператор, называемый гамильтонианом, а $[A,B] = AB - BA$ – коммутатор операторов A и B. Квантовые системы, уравнения движения которых имеют вид (11), обычно называются **гамильтоновыми** системами.

Пусть эволюция наблюдаемой величины A, являющейся функцией операторов координат Q_k и импульсов P_k, описывается уравнением

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[H, A] + D(A), \tag{12}$$

в котором оператор $D(A)$ нельзя представить в виде $\frac{i}{\hbar}[A, W]$, где W – ассоциативный эрмитов оператор. При этом оператор $D(A)$ обычно называют оператором диссипации величины A. Если среди динамических переменных системы имеются величины, для которых оператор диссипации отличен от нуля, то такие системы называют **негамильтоновыми** или **диссипативными системами**.

Рассмотрим квантовую систему, в которой уравнения эволюции операторов координаты Q_k и импульса P_k имеют вид

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, Q_k] - G_k(t,Q,P), \qquad \frac{dP_k}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, P_k] + F_k(t,Q,P), \tag{13}$$

где

$$G_k(t,Q,P) = -D(Q_k) \quad \text{и} \quad F_k(t,Q,P) = D(P_k). \tag{14}$$

Обобщая определение 2.1 классической диссипативной системы, получаем

Определение 2.2. Квантовая система, эволюция которой задается уравнениями (13), называется **квантовой диссипативной системой**, если правые части уравнения (13) не удовлетворяют хотя бы одному из условий

$$\Omega^s{}_{kl}(t,Q,P)=0, \tag{15}$$

где $s=1,2,3;\ k,l=1,\dots,n$,

$$\Omega^1{}_{kl}=-\frac{i}{\hbar}\big([Q_k,G_l]-[Q_l,G_k]\big),\qquad \Omega^2{}_{kl}=-\frac{i}{\hbar}\big([G_k,P_l]-[Q_k,F_l]\big), \tag{16}$$

$$\Omega^3{}_{kl}=-\frac{i}{\hbar}\big([P_l,F_k]-[P_k,F_l]\big). \tag{17}$$

Если уравнения эволюции (13) квантовой системы таковы, что правые части этих уравнений удовлетворяют всем условиям (15)–(17), то такая система называется **гамильтоновой системой**.

2.3. Нелиев неассоциативный оператор. Трудности квантового описания во многом обусловлены невозможностью представить оператор диссипации $D(A)$ в виде $\frac{i}{\hbar}[A,W]$, где W – ассоциативный оператор. В работе [1] мы предложили отказаться от требования ассоциативности оператора W, а следовательно, и от предположения о выполнимости правила Лейбница и тождества Якоби для квантовых диссипативных систем.

Предположим, что оператор диссипации $D(A)$ величины A представим в виде $D(A)=\frac{i}{\hbar}[A,W]$. Тогда операторы $G_k(t,Q,P)$ и $F_k(t,Q,P)$, задающие эволюцию (13) квантовой диссипативной системы и определенные в (14), можно записать в виде

$$F_k(t,Q,P)=-\frac{i}{\hbar}[W,P_k],\qquad G_k(t,Q,P)=\frac{i}{\hbar}[W,Q_k]. \tag{18}$$

В этом случае величины (16), (17) представимы в виде

$$\Omega^1_{kl}=J[Q_k,Q_l,W]=\frac{1}{\hbar^2}\big(\big[[W,Q_k],Q_l\big]-\big[[W,Q_l],Q_k\big]\big)\qquad(k\not\equiv l), \tag{19}$$

$$\Omega^2_{kl}=J[Q_k,P_l,W]=\frac{1}{\hbar^2}\big(\big[[W,Q_k],P_l\big]-\big[[W,P_l],Q_k\big]\big), \tag{20}$$

$$\Omega^3_{kl}=J[P_k,P_l,W]=\frac{1}{\hbar^2}\big(\big[[W,P_k],P_l\big]-\big[[W,P_l],P_k\big]\big)\qquad(k\not\equiv l), \tag{21}$$

где

$$J[A,B,C]=\frac{1}{\hbar^2}\big(\big[[A,B],C\big]+\big[[B,C],A\big]+\big[[C,A],B\big]\big)$$

– якобиан операторов A,B,C.

Таким образом, определение квантовой диссипативной системы как системы, в которой не выполняется хотя бы одно из условий (15)–(17), может быть переформулировано с использованием якобианов (19)–(21). Квантовая система, в которой эволюция наблюдаемых величин $A=A(t,Q,P)$ описывается уравнением

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{i}{\hbar}[H-W,A], \tag{22}$$

называется квантовой диссипативной (негамильтоновой) системой, если хотя бы одно из выражений Ω^s_{kl}, описывающих якобианы (19)–(21) операторов Q_k, P_k и W, отлично от нуля. Таким образом приходим к следующему определению.

Определение 2.3. Пусть динамические переменные (наблюдаемые) квантовой системы описываются ассоциативными самосопряженными операторами $A = A(t, X)$, эволюция которых задается уравнением

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, A], \tag{23}$$

где $\mathcal{H}$ – некоторый оператор, характеризующий данную систему ($\mathcal{H} = H - W$), а X – операторы координат Q_k и импульсов P_k. Такая динамическая система называется **квантовой диссипативной системой**, если хотя бы один из якобианов $J[X_k, X_l, \mathcal{H}]$ операторов Q_k, P_k и $\mathcal{H}$ отличен от нуля.

Таким образом, мы исходили из требования самосогласованности квантового описания диссипативных систем, сформулированого в виде отсутствия противоречия между уравнениями эволюции квантовых диссипативных систем и квантовыми коммутационными соотношениями. Это привело нас к тому, что оператор, описывающий эволюцию квантовой диссипативной системы (обобщенный гамильтониан $\mathcal{H}$) должен нарушать тождество Якоби. Следовательно, для описания квантовых диссипативных систем необходимо использовать антикоммутативные нелиевы алгебры.

Заметим, что для квантовых диссипативных систем правило почленного дифференцирования по времени (правило Лейбница), вообще говоря, не имеет места (см. приложение). Это одно из существенных отличий диссипативных систем от гамильтоновых.

Использование нелиевых алгебр приводит к тому, что правило почленного дифференцирования для квантовых диссипативных систем деформируется. Так, действие полной производной по времени на произведение операторов деформирует правило Лейбница за счет возникновения ассоциаторов

$$D(AB) = D(A)B + AD(B) + Z(A, B), \tag{24}$$

где

$$Z(A, B) = (A, B, W) - (A, W, B) + (W, A, B),$$

$(x, y, z) \equiv (xy)z - x(yz)$ – ассоциатор операторов x, y, z, $D = -i\hbar(d/dt) = [\mathcal{H}, .]$. Действие полной производной по времени на коммутатор операторов приводит к деформации правила Лейбница за счет возникновения алгебраического якобиана операторов A, B и W:

$$D\big([A, B]\big) = \big[D(A), B\big] + \big[A, D(B)\big] + J(A, B), \tag{25}$$

где

$$J(A, B) = \hbar^2 J[A, \mathcal{H}, B] = \hbar^2 J[A, B, W] = Z(A, B) - Z(B, A).$$

Соотношения (24) и (25), обобщающие правила Лейбница, приводят к снятию противоречия между уравнениями эволюции квантовых диссипативных систем (13) и квантовыми коммутационными соотношениями (см. утверждение П. 1 приложения).

2.4. Уравнение эволюции состояния квантовой диссипативной системы. Известно, что важным свойством диссипативных процессов является изменение энтропии. Тем не менее квантовое уравнение эволюции для оператора плотности $\rho(t, Q, P)$ (уравнение фон Неймана)

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] \tag{26}$$

сохраняет энтропию

$$\langle S \rangle = \mathrm{Sp}(\rho \ln \rho)$$

неизменной. Поэтому для описания квантовых диссипативных систем обычно используется обобщение уравнения (26), имеющее вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + K(\rho). \tag{27}$$

Оператор $K(\rho)$ описывает диссипативную часть эволюции оператора плотности во времени. Разными авторами [6, 7] рассматривались различные формы оператора $K(\rho)$. Однако предлагаемые обобщения уравнения (26) не связаны с классическим уравнением Лиувилля для диссипативных систем [8, 1]

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\{\rho, h\} - D_0(\rho) + \Omega\rho, \tag{28}$$

где

$$D_0(\rho) = \left(F_k \frac{\partial \rho}{\partial p_k} - \frac{\partial \rho}{\partial q_k} G_k \right), \tag{29}$$

$$\Omega = \sum_{k=1}^{n} \Omega^2{}_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \bigl(\{G_k, p_k\} - \{q_k, F_k\} \bigr) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial G_k}{\partial q_k} - \frac{\partial F_k}{\partial p_k} \right). \tag{30}$$

Квантовый аналог уравнения Лиувилля (28) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t, Q, P) = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + D(\rho) + \frac{1}{2}(\Omega\rho + \rho\Omega), \tag{31}$$

где $\Omega(Q, P) = \sum_{k=1}^{n} \Omega^2_{kk}$, а Ω^2_{kk} определены соотношением (16). Воспользовавшись предположением, что оператор диссипации представим в виде $D(\rho) = \frac{i}{\hbar}[\rho, W]$, получаем квантовое уравнение эволюции оператора плотности для диссипативной системы (обобщение уравнения фон Неймана) в виде [1, 3]

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t, Q, P) = -\frac{i}{\hbar}[H - W, \rho] + \frac{1}{2}(\Omega\rho + \rho\Omega), \tag{32}$$

где

$$\Omega(Q, P) = \sum_{k=1}^{n} \Omega^2_{kk} = \sum_{k=1}^{n} J[Q_k, P_k, W]. \tag{33}$$

Данное обобщение уравнения фон Неймана, в отличие от других предлагаемых уравнений, получено непосредственно из уравнения Лиувилля для диссипативных систем (28)–(30) и является квантовым аналогом этого уравнения.

В результате можно ввести определение квантовой диссипативной системы, основанное не на уравнениях эволюции наблюдаемых, а на уравнениях эволюции состояния динамической системы.

Определение 2.4. Пусть состояние квантовой системы описывается самосопряженным оператором плотности $\rho = \rho(t,Q,P)$, эволюция которого во времени задается уравнением вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,Q,P) = -\frac{i}{\hbar}[\mathcal{H},\rho] + \frac{1}{2}(\Omega\rho + \rho\Omega), \tag{34}$$

где $\mathcal{H}$ – некоторый оператор, характеризующий данную систему. Тогда динамическая система называется **квантовой диссипативной системой**, если хотя бы один из якобианов $J[Q_k,\mathcal{H},Q_l]$, $J[Q_k,\mathcal{H},P_l]$ или $J[P_k,\mathcal{H},P_l]$ отличен от нуля, а оператор Ω представим в виде

$$\Omega(Q,P) = \sum_{k=1}^{n} J[Q_k,\mathcal{H},P_k]. \tag{35}$$

Таким образом, можно исходить из требования самосогласованности квантового описания диссипативных систем, сформулированного в виде взаимосвязи уравнения эволюции состояния квантовой диссипативной системы с уравнением Лиувилля для классической диссипативной системы. Это по-прежнему приводит к нарушению оператором эволюции тождества Якоби, т.е. для описания квантовых диссипативных систем необходимо использовать антикоммутативные нелиевы алгебры.

3. ОБОБЩЕННАЯ АЛГЕБРА ГЕЙЗЕНБЕРГА–ВЕЙЛЯ

3.1. Алгебра Гейзенберга–Вейля. В дальнейшем мы будем использовать систему единиц, в которой постоянная Планка равна единице $\hbar = 1$, и полагать $G_k(t,Q,P) = i[W,Q_k]$ равным нулю.

Напомним, что **алгеброй Гейзенберга–Вейля** W_N называется вещественная $(2N+1)$-параметрическая алгебра Ли, задаваемая перестановочными соотношениями

$$[e^{(1)},e_k^{(2)}] = [e^{(1)},e_k^{(3)}] = [e_k^{(2)},e_l^{(2)}] = [e_k^{(3)},e_l^{(3)}] = 0, \qquad [e_k^{(2)},e_l^{(3)}] = \delta_{kl}e^{(1)}, \tag{36}$$

где $k,l = 1,2,\dots,N$. В квантовой теории часто используются базисные элементы

$$I = ie^{(1)}, \qquad Q_k = ie_k^{(2)}, \qquad P_k = ie_k^{(3)}, \tag{37}$$

которые интерпретируются как единичный оператор, оператор координаты и оператор импульса, соответственно. Базисные элементы $\{I,Q_k,P_l\}$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[I,Q_k] = [I,P_k] = [Q_k,Q_l] = [P_k,P_l] = 0, \qquad [Q_k,P_l] = \imath\delta_{kl}I, \tag{38}$$

которые называются каноническими коммутационными соотношениями. Выражения (38) означают, что операторы $\{I,Q_i,P_i\}$ порождают алгебру Ли, называемую алгеброй Гейзенберга–Вейля. Общий элемент алгебры Гейзенберга–Вейля W_N имеет вид

$$z_0 = x_k^{(1)}e_k^{(1)} + x_k^{(2)}e_k^{(2)} + x^{(3)}e^{(3)} = sI + x_kQ_k + y_kP_k.$$

3.2. Обобщенная алгебра Гейзенберга–Вейля. Введем следующее

Определение 3.1. **Обобщенной алгеброй Гейзенберга–Вейля** W_N^* назовем вещественную $2(N+1)$-параметрическую алгебру, задаваемую перестановочными соотношениями (36) и соотношениями

$$[e^{(1)}, e^{(4)}] = [e_k^{(2)}, e^{(4)}] = 0, \qquad [e_k^{(3)}, e^{(4)}] = F_k(e^{(2)}, e^{(3)}), \tag{39}$$

где $F_k(,)$ – некоторая функция базисных элементов $e_k^{(2)}$ и $e_k^{(3)}$. В простейшем случае линейной обобщенной алгебры Гейзенберга–Вейля LW_N^* последнее из соотношений (39) имеет вид

$$[e_k^{(3)}, e^{(4)}] = e_k^{(3)}. \tag{40}$$

Если использовать базисные элементы $\{I, Q_k, P_k, W\}$, определенные формулами (37) и $W = ie^{(2)}$, то перестановочные соотношения (39) примут вид

$$[I, W] = [Q_k, W] = 0, \qquad [W, P_k] = \imath F_k(Q, P). \tag{41}$$

В соотношении (41) элемент $F_k(Q, P)$ не является базисным, а есть некоторая функция базисных элементов Q_k, P_k. Под элементом $F_k(Q, P)$ можно понимать многочлен от базисных элементов Q_k, P_k. В простейшем случае, интересном с прикладной точки зрения, последнее из соотношений (41) имеет вид

$$[W, P_k] = \imath P_k. \tag{42}$$

Обобщенная алгебра Гейзенберга–Вейля W_N^* соответствует диссипативной системе с N степенями свободы. Физический смысл элемента $F_i(Q, P)$ состоит в том, что он описывает диссипативную силу (силу трения), действующую на изучаемую систему. При этом случай (42) соответствует линейной зависимости диссипативных сил от скорости. Заметим, что соотношение $[W, Q_i] = 0$ обусловлено физическим требованием “связи гамильтониана с энергией системы” [5, 1].

3.3. Тождества для якобианов. Следствием обобщенных коммутационных соотношений (38) и (41) являются следующие тождества для якобианов:

$$J[Q_k, Q_l, Q_j] = J[Q_k, Q_l, P_j] = J[Q_k, P_l, P_j] = J[P_k, P_l, P_j] = 0, \tag{43}$$

$$J[W, W, W] = J[Q_k, W, W] = J[P_k, W, W] = J[Q_k, Q_l, W] = 0, \tag{44}$$

$$J[P_k, P_l, W] = \imath\big([F_k, P_l] - [F_l, P_k]\big), \qquad J[Q_k, P_l, W] = -\imath[F_l, Q_k], \tag{45}$$

где $J[x, y, z] = \big[[x, y], z\big] + \big[[y, z], x\big] + \big[[z, x], y\big]$ – якобиан элементов x, y, z.

Видно, что в силу перестановочных соотношений (41) некоторые якобианы базисных элементов (45) не равны нулю, что является основным отличием диссипативных систем от недиссипативных. Неравенство нулю якобианов (45) говорит о том, что обобщенная алгебра Гейзенберга–Вейля W_N^* не является алгеброй Ли.

3.4. Общий элемент обобщенной алгебры Гейзенберга–Вейля. Рассмотрим общий элемент z обобщенной алгебры Гейзенберга–Вейля W_N^* над полем действительных или комплексных чисел

$$z = sI + x_k Q_k + y_k P_k + tW, \tag{46}$$

где s, x_k, y_k, t – числа. Коммутатор двух элементов z_1 и z_2 имеет вид

$$[z_1, z_2] = \imath s_3 I + \imath t_k F_k(Q, P), \tag{47}$$

где

$$s_3 = x_k^1 y_k^2 - x_k^2 y_k^1, \qquad t_k = t^1 y_k^2 - t^2 y_k^1.$$

Якобиан произвольных трех элементов z_1, z_2 и z_3 представим в виде

$$J[z_1, z_2, z_3] = is_{kl}[Q_k, F_l] + it_{kl}\big([F_k, P_l] - [F_l, P_k]\big), \tag{48}$$

где

$$s_{kl} = (x_k^1 y_l^2 - x_k^2 y_l^1)t^3 + (x_k^1 y_l^3 - x_k^3 y_l^1)t^2 + (x_k^2 y_l^3 - x_k^3 y_l^2)t^1,$$
$$t_{kl} = 2(y_k^2 y_l^3 t^1 + y_k^3 y_l^1 t^2 + y_k^1 y_l^2 t^3).$$

В простейшем случае, когда $F_k(Q,P) = P_k$, коммутатор двух элементов z_1 и z_2 можно записать в виде

$$[z_1, z_2] = \imath z_3, \tag{49}$$

где

$$s_3 = x_k^1 y_k^2 - x_k^2 y_k^1, \qquad x_k^3 = t^3 = 0, \qquad y_k^3 = t^1 y_k^2 - t^2 y_k^1, \tag{50}$$

а якобиан произвольных трех элементов z_1, z_2 и z_3 имеет вид

$$J[z_1, z_2, z_3] = z_4, \tag{51}$$

где

$$s_4 = -s_{kl}\delta_{kl}, \qquad x_k^4 = y_k^4 = t^4 = 0.$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Известно, что при описании диссипативной системы можно исходить из рассмотрения замкнутой системы, частью которой является исследуемая диссипативная система. Однако часто возникают ситуации, когда трудно или вообще невозможно указать замкнутую систему, включающую данную диссипативную систему. Так, например, обстоит дело при квантовании электромагнитного поля в резонаторе с потерями [2, 9].

Отметим, что модели квантовых диссипативных систем могут играть более существенную роль в фундаментальных теориях, чем отводилась им до сих пор. Так, например, важность квантовых диссипативных систем в теории струн и суперструн обусловлена, в частности, следующим.

1. Струны в пространствах с некритической размерностью (например, в четырехмерном пространстве) являются диссипативными системами в фазовом пространстве

"констант связи". Диссипативная сила в этом случае определяется ненулевыми бета-функциями соответствующих констант связи [10].

2. Распад чистого квантового состояния в смешанное может происходить на уровне струны из-за квантовых флуктуаций метрики, являющихся виртуальными черными дырами на двумерной поверхности, заметаемой струной в процессе движения, что приводит к необходимости неунитарного обобщения уравнения фон Неймана [7].

3. Закон сохранения энергии и импульса обычно получается как следствие априорного ограничения на свойства пространственно-временной геометрии. Однако более желательным и последовательным было бы не постулирование геометрии, а получение каких-либо ограничений на геометрию в рамках более общей теории. Например, получение ограничений на свойства и структуры пространства-времени из требования самосогласованности квантовой теории аналогично получению калибровочной группы и размерности пространства-времени в теориях струн и суперструн.

4. Замкнутая бозонная струна для широкого класса неримановых геометрий, например в искривленном аффинно-метрическом пространстве-времени, является диссипативной системой [11–13].

В данной работе показано, что требование самосогласованности динамического описания квантовых диссипативных (негамильтоновых) систем приводит к необходимости отказаться от тождеств Якоби для генераторов эволюции системы и использовать антикоммутативные нелиевы алгебры. Свойства таких алгебр предполагается описать в четвертой части данной работы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 96-02-16413-а.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Правило Лейбница и диссипативные системы

Несовместность квантовых уравнений эволюции диссипативной системы и квантовых коммутационных соотношений видна при рассмотрении производных по времени от коммутаторов координат и импульсов, при использовании правила Лейбница и тождества Якоби. Эта несовместность обусловлена предположением о выполнимости правила Лейбница и тождества Якоби для диссипативных систем и связана с тем, что уравнения эволюции во времени для диссипативных систем нарушают структуру алгебры Ли.

Отметим, что для квантовой гамильтоновой системы правило почленного дифференцирования по времени (правило Лейбница) $D(AB) = D(A)B + AD(B)$ справедливо для произведения любых операторов. Для квантовых диссипативных систем правило Лейбница, вообще говоря, не имеет места.

Утверждение П.1. *Применение правила почленного дифференцирования по времени (правила Лейбница) для квантовых коммутационных соотношений операторов координат и импульсов, описывающих квантовую диссипативную систему* (13), *приводит к необходимости выполнения условий* (15)–(17) *на правые части уравнений* (13) *и, следовательно, к эквивалентности уравнений движения* (12) *уравнениям эволюции гамильтоновой системы* (11).

Доказательство. Квантовые коммутационные соотношения для операторов координат и импульсов имеют вид

$$\big[Q_k(t), P_l(t)\big] = \imath\hbar\delta_{kl} I, \qquad \big[Q_k(t), Q_l(t)\big] = \big[P_k(t), P_l(t)\big] = 0. \tag{52}$$

Рассматривая производную по времени от первого соотношения из (52), получим

$$\frac{d}{dt}[Q_k(t), P_l(t)] = 0. \tag{53}$$

Правило Лейбница в данном случае имеет вид

$$\frac{d}{dt}\big[Q_k(t), P_l(t)\big] = \left[\frac{d}{dt}Q_k(t), P_l(t)\right] + \left[Q_k(t), \frac{d}{dt}P_l(t)\right]. \tag{54}$$

Следовательно, имеем соотношение

$$\left[\frac{d}{dt}Q_k(t), P_l(t)\right] + \left[Q_k(t), \frac{d}{dt}P_l(t)\right] = 0. \tag{55}$$

Используя уравнения движения (13), получаем

$$\frac{i}{\hbar}\Big(\big[[H, Q_k], P_l\big] + \big[Q_k, [H, P_l]\big]\Big) + \big([Q_k, F_l] - [G_k, P_l]\big) = 0. \tag{56}$$

Тождество Якоби для ассоциативных операторов Q_k, P_l, H имеет вид

$$J[Q_k, P_l, H] = \frac{1}{\hbar^2}\big(\big[[Q_k, P_l], H\big] + \big[[P_l, H], Q_k\big] + \big[[H, Q_k], P_l\big]\big) = 0,$$

т.е.

$$\big[[H, Q_k], P_l\big] + \big[Q_k, [H, P_l]\big] = 0.$$

В результате получаем тождество

$$\Omega^2{}_{kl} = -\frac{i}{\hbar}\big([G_k, P_l] - [Q_k, F_l]\big) = 0. \tag{57}$$

Аналогично, рассматривая другие квантовые коммутационные соотношения (52), можно получить все тождества (15)–(17).

Таким образом, утверждение о применимости правила Лейбница для квантовых диссипативных систем (13) эквивалентно требованию выполнения условий (15)–(17), т.е. выполнению условий гамильтоновости (недиссипативности) системы [14].

Следовательно, для квантовых диссипативных систем правило почленного дифференцирования по времени (правило Лейбница), вообще говоря, не имеет места. В этом проявляется существенное отличие диссипативных систем от гамильтоновых. Тот факт, что оператор производной по времени и оператор эволюции не удовлетворяют правилу Лейбница означает, что эти операторы не являются операторами дифференцирования с математической точки зрения. Такие операторы обычно называются диссипативными операторами. Приведем их определение:

Определение П.1. Оператор D называется **диссипативным оператором**, если для него выполняется обобщенное правило Лейбница

$$D(AB) = D(A)B + AD(B) + Z(A,B)$$

и выполняются условия

$$D(A+B) = D(A) + D(B)$$

и

$$D(\lambda A) = \lambda D(A), \qquad \lambda \in R;$$

$Z(A,B)$ – некоторый ненулевой оператор, зависящий от вида операторов A и B.

Таким образом, оператор диссипации, описывающий эволюцию (12) квантовой диссипативной системы, а следовательно, и оператор производной по времени, являются диссипативными операторами.

Отметим, что нарушение правила Лейбница и появление диссипативных операторов в качестве операторов эволюции хорошо известны в теории квантовых динамических полугрупп [15], используемой для описания открытых систем.

Список литературы

[1] *В. Е. Тарасов.* ТМФ. 1994. Т. 100. № 3. С. 402–417.
[2] *Г. Хакен.* Лазерная светодинамика. М.: Мир, 1988. С. 255–274.
[3] *V. E. Tarasov.* Dissipative quantum mechanics: the generalization of the canonical quantization and von Neumann equation: Preprint ICTP. IC-94-192. Trieste, 1994. (hep-th/9410025).
[4] *В. М. Филлипов, В. М. Савчин, С. Г. Шорохов.* Вариационные принципы для непотенциальных операторов. В кн.: Совр. пробл. матем. М.: ВИНИТИ, 1992. С. 3–178.
[5] *I. K. Edwards.* Amer. J. Phys. Rev. 1979. V. 47. № 2. P. 153–155.
[6] *M. Hensel, H. J. Korsch.* J. Phys. 1992. V. A25. № 7. P. 2043–2064.
[7] *J. Ellis, J. S. Hagelin, D. V. Nanopoulos, M. Srednicki.* Nucl. Phys. B. 1984. V. B242. № 3. P. 381–395.
[8] *V. H. Steeb.* Physica A. 1979. V. 95. № 1. P. 181–190.
[9] *В. С. Машкевич.* Кинетическая теория лазеров. М.: Наука, 1971. С. 22–29.
[10] *J. Ellis, N. E. Mavromatos, D. V. Nanopoulos.* Phys. Lett. B. 1992. V. B293. № 1. P. 37–48.
[11] *В. Е. Тарасов.* ТМФ. 1994. Т. 101. № 1. С. 38–46.
[12] *V. E. Tarasov.* Phys. Lett. B. 1994. V. 323. № 2/3. P. 296–304.
[13] *V. E. Tarasov.* Mod. Phys. Lett. A. 1994. V. 9. № 26. P. 2411–2419.
[14] *S. A. Hojman, L. C. Shepley.* J. Math. Phys. 1991. V. 32. № 1. P. 142–146.
[15] *У. Брателли.* О динамических полугруппах и действиях компактных групп. В кн.: Квантовые случайные процессы и открытые системы. М.: Мир, 1988. С.180–196.

Поступила в редакцию 30.IV.1996 г.

V. E. Tarasov

QUANTUM DISSIPATIVE SYSTEMS.
III. DEFINITION AND ALGEBRAIC STRUCTURE

In this paper we start from the requirement of consistent quantum description of dissipative (non-Hamiltonian) systems, which is formulated as absence of contradictions between evolution equations for quantum dissipative systems and quantum commutations relations. This leads to the fact that Jacoby identity is not satisfied. So, the consistent quantum description requirement leads to necessity to be beyond Lie algebra and group. In order to describe dissipative (non-Hamiltonian) systems in quantum theory we need to use anti-commutative non-Lie algebra.