**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 158, № 2
февраль, 2009**

 В. Е. Тарасов*

ДРОБНОЕ ОБОБЩЕНИЕ КВАНТОВОГО МАРКОВСКОГО УПРАВЛЯЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ

Предложено обобщение квантового марковского уравнения для наблюдаемых. В этом обобщенном уравнении используется супероператор, который является дробной степенью вполне диссипативного супероператора. Доказано, что введенные дробные степени супероператора являются инфинитезимальными генераторами вполне положительных полугрупп. Описаны свойства этих полугрупп. Предлагаемое дробное квантовое марковское уравнение решается для гармонического осциллятора с линейным трением. Показатель дробной степени марковского супероператора может рассматриваться как параметр, описывающий меру экранирования окружения квантовой системы: при $\alpha = 0$ – отсутствие влияния окружения на систему; при $\alpha = 1$ – полное влияние окружения; при $0 < \alpha < 1$ – степенное экранирование окружения.

Ключевые слова: дробные степени операторов, квантовые негамильтоновы системы, квантовое марковское уравнение, вполне положительные полугруппы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Дробный математический анализ возник в 1695 г., когда производная порядка $\alpha = 1/2$ была описана Лейбницем [1]–[3]. Производные и интегралы нецелого порядка изучались в работах Лейбница, Лиувилля, Грюнвальда, Летникова, Римана. К настоящему времени написано много книг о дробном исчислении и дробных дифференциальных уравнениях [1], [2], [4]–[8]. Производные и интегралы нецелого порядка и дробные интегродифференциальные уравнения находят различные применения в современной физике (см., например, монографии [9]–[12] и обзоры [13]–[16]).

В квантовой механике наблюдаемые задаются самосопряженными операторами. Динамика квантовой системы описывается супероператорами. *Супероператор* – это отображение, которое сопоставляет одному оператору некоторый другой оператор.

Движение системы естественно описывать в терминах ее инфинитезимальных изменений. Уравнение квантовой наблюдаемой называется уравнением Гейзенберга. Для квантовых гамильтоновых систем инфинитезимальный супероператор определяется некоторой формой дифференцирования. Дифференцирование является

*Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: tarasov@theory.sinp.msu.ru

линейным отображением $\mathcal{L}$, которое удовлетворяет правилу Лейбница $\mathcal{L}(AB) = (\mathcal{L}A)B + A(\mathcal{L}B)$ для любых операторов A и B. Дробная производная может быть определена как дробная степень производной (см., например, [17]). Известно, что инфинитезимальный генератор $\mathcal{L} = 1/(i\hbar)[H, \cdot\,]$, который используется для гамильтоновых систем, является дифференцированием квантовых наблюдаемых. В статье [18] рассматривается дробное дифференцирование на множестве квантовых наблюдаемых как дробная степень $\mathcal{L}^\alpha$ операции дифференцирования $\mathcal{L} = 1/(i\hbar)[H, \cdot\,]$. В результате было получено дробное обобщение уравнения Гейзенберга. Это позволило обобщить понятие квантовой гамильтоновой системы. Заметим, что дробное обобщение классических гамильтоновых систем было предложено в статье [19] (см. также [20]). В общем случае квантовые системы являются негамильтоновыми, а супероператор $\mathcal{L}$ не является оператором дифференцирования. Для широкого класса квантовых систем инфинитезимальный генератор $\mathcal{L}$ является вполне диссипативным [21]–[24]. В связи с этим интересно рассмотреть дробное обобщение уравнений движения квантовых негамильтоновых систем, использующее дробную степень вполне диссипативного супероператора.

Наиболее общим изменением состояния квантовой негамильтоновой системы является квантовая операция [25]–[31]. Можно описать квантовую операцию для квантовой системы, начиная с унитарной эволюции некоторой закрытой гамильтоновой системы, если квантовая система является частью этой закрытой системы [32], [33]. Однако могут возникать случаи, когда трудно или невозможно найти гамильтонову систему, которая включает в себя данную квантовую систему. В результате теорию квантовых негамильтоновых систем можно рассматривать как фундаментальное обобщение квантовой механики гамильтоновых систем [21]–[24]. Квантовые операции, которые описывают динамику негамильтоновых систем, могут рассматриваться как действительные вполне положительные сохраняющие след супероператоры на некотором операторном пространстве. Эти супероператоры образуют вполне положительную полугруппу. Инфинитезимальный генератор этой полугруппы является вполне диссипативным супероператором. Проблемы динамики негамильтоновых систем связаны с получением явного вида инфинитезимального генератора, что, в свою очередь, связано с проблемой нахождения наиболее общего явного вида такого супероператора. Эта проблема была исследована в работах [34]–[36]. В настоящей работе рассматриваются супероператоры, которые являются дробными степенями вполне диссипативных супероператоров. Доказывается, что предлагаемые супероператоры являются инфинитезимальными генераторами вполне положительных полугрупп. Квантовые марковские уравнения с вполне диссипативными супероператорами являются наиболее общим видом марковского уравнения, описывающего неунитарную эволюцию оператора плотности, сохраняющую след и являющуюся вполне положительной. Мы рассматриваем дробное обобщение этого квантового марковского уравнения, которое решается для случая гармонического осциллятора с трением. Можно предположить, что другие решения и свойства, описанные в статьях [37]–[45], также могут быть рассмотрены для дробных обобщений квантового марковского уравнения и уравнения Горини–Коссаковского–Сударшана [34], [35].

Показатель дробной степени инфинитезимального генератора может рассматриваться как параметр, описывающий меру экранирования окружающей среды. Используя представление взаимодействия для квантового марковского уравнения, мы рассматриваем дробную степень негамильтоновой части инфинитезимального генератора с показателем α. В пределе $\alpha \to 0$ получается уравнение Гейзенберга для гамильтоновых систем. В случае $\alpha = 1$ получается обычное квантовое марковское уравнение. В результате можно выделить следующие случаи: 1) отсутствие влияния окружающей среды ($\alpha = 0$); 2) полное влияние окружающей среды ($\alpha = 1$); 3) степенное экранирование влияния окружающей среды ($0 < \alpha < 1$). Физическая интерпретация дробного квантового марковского уравнения может быть связана с существованием некоторого экранирования окружающей среды и ее влияния. Квантовые вычисления посредством квантовых операций над смешанными состояниями [30] могут контролироваться с помощью этого параметра. Полагаем, что существуют стационарные состояния открытых квантовых систем [37], [40], [45]–[49], которые зависят от этого параметра. Отметим, что можно рассматривать квантовую динамику с низкой степенью фрактальности с помощью обобщения метода, предложенного в статье [50] (см. также [51], [52]).

В разделе 2 кратко обсуждаются супероператоры на операторном гильбертовом пространстве и квантовые операции, вводятся необходимые обозначения. В разделе 3 определяется дробная степень супероператора. В разделе 4 предлагается дробное обобщение квантового марковского уравнения. В разделе 5 описываются свойства дробной полугруппы. В разделах 6 и 7 решаются дробные уравнения, описывающие квантовые гармонические осцилляторы с трением и без трения.

2. СУПЕРОПЕРАТОР И КВАНТОВЫЕ ОПЕРАЦИИ

Квантовые теории состоят из двух частей: кинематической структуры, описывающей начальные состояния и наблюдаемые системы, и динамической структуры, описывающей изменение этих состояний и наблюдаемых с течением времени. В квантовой механике состояния и наблюдаемые могут быть заданы операторами. Динамическое описание квантовой системы задается супероператорами, которые являются отображениями множества операторов в себя.

Пусть $\mathcal{M}$ – операторное пространство. Обозначим через $\mathcal{M}^*$ пространство, дуальное к $\mathcal{M}$, т.е. $\mathcal{M}^*$ – множество всех линейных функционалов на $\mathcal{M}$. Классическими обозначениями для элементов пространства $\mathcal{M}$ являются $|B)$ и B. Символами $(A|$ и ω мы будем обозначать элементы $\mathcal{M}^*$. По теореме Рисса–Фреше любой линейный непрерывный функционал ω на операторном гильбертовом пространстве $\mathcal{M}$ имеет вид $\omega(B) = (A|B)$ для любого элемента $B \in \mathcal{M}$, где $|A)$ есть элемент из $\mathcal{M}$. Поэтому элемент A может рассматриваться не только как элемент $|A)$ из $\mathcal{M}$, но также и как элемент $(A|$ дуального пространства $\mathcal{M}^*$. Символ $(A|B)$, обозначающий значение функционала $(A|$ на операторе $|B)$, является графическим объединением символов $(A|$ и $|B)$.

Определение 1. *Линейным* супероператором называется отображение $\mathcal{L}$ операторного пространства $\mathcal{M}$ в себя, для которого выполняются следующие соотношения:

$$\mathcal{L}(aA + bB) = a\mathcal{L}(A) + b\mathcal{L}(B)$$

для всех $A, B \in D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{M}$, где $D(\mathcal{L})$ есть область определения $\mathcal{L}$, и $a, b \in \mathbb{C}$.

Супероператор $\mathcal{L}$ сопоставляет каждому оператору $A \in D(\mathcal{L})$ оператор $\mathcal{L}(A)$.

Определение 2. Пусть $\mathcal{L}$ – супероператор на операторном пространстве $\mathcal{M}$. *Сопряженным* супероператором для $\mathcal{L}$ называется супероператор $\Lambda = \bar{\mathcal{L}}$ на $\mathcal{M}^*$ такой, что

$$(\Lambda(A)|B) = (A|\mathcal{L}(B)) \tag{1}$$

для любого $B \in D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{M}$ и $A \in D(\Lambda) \subset \mathcal{M}^*$.

Пусть $\mathcal{M}$ – операторное гильбертово пространство, а $\mathcal{L}$ – супероператор на $\mathcal{M}$. Тогда $(A|B) = \mathrm{Tr}[A^\dagger B]$ и соотношение (1) принимает вид

$$\mathrm{Tr}\big[(\Lambda(A))^\dagger B\big] = \mathrm{Tr}\big[A^\dagger \mathcal{L}(B)\big].$$

Если $\mathcal{M}$ – операторное гильбертово пространство, то по теореме Рисса–Фреше $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^*$ изоморфны и можно определить самосопряженные супероператоры.

Определение 3. *Самосопряженным* называется супероператор $\mathcal{L}$ на операторном гильбертовом пространстве $\mathcal{M}$, для которого выполняется соотношение $(\mathcal{L}(A)|B) = (A|\mathcal{L}(B))$ для всех $A, B \in D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{M}$ и $D(\mathcal{L}) = D(\bar{\mathcal{L}})$.

Пусть $\mathcal{M}$ – нормированное операторное пространство. Супероператор $\mathcal{L}$ называется *ограниченным*, если $\|\mathcal{L}(A)\|_{\mathcal{M}} \leqslant c\|A\|_{\mathcal{M}}$ для некоторой константы c и всех $A \in \mathcal{M}$. Величина

$$\|\mathcal{L}\| = \sup_{A \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}(A)\|_{\mathcal{M}}}{\|A\|_{\mathcal{M}}}$$

называется *нормой* супероператора $\mathcal{L}$. Если $\mathcal{M}$ – нормированное пространство и супероператор $\mathcal{L}$ является ограниченным, то $\|\bar{\mathcal{L}}\| = \|\mathcal{L}\|$.

В квантовой теории важную роль играет класс действительных супероператоров.

Определение 4. Пусть $\mathcal{M}$ – операторное пространство, $A^\dagger$ – оператор, сопряженный к $A \in \mathcal{M}$. *Действительным* называется супероператор $\mathcal{L}$ на $\mathcal{M}$ такой, что

$$\big[\mathcal{L}(A)\big]^\dagger = \mathcal{L}(A^\dagger)$$

для любого $A \in D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{M}$ и $A^\dagger \in D(\mathcal{L})$.

Если $\mathcal{L}$ – действительный супероператор, то супероператор $\Lambda = \bar{\mathcal{L}}$ тоже действительный. Если $\mathcal{L}$ – действительный супероператор, а A – самосопряженный оператор, $A^\dagger = A \in D(\mathcal{L})$, то оператор $B = \mathcal{L}(A)$ тоже самосопряженный. Таким образом, супероператоры на множестве квантовых наблюдаемых $\mathcal{M}$ должны быть действительными. Динамика квантовых систем должна описываться действительными супероператорами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Неотрицательным* супероператором называется отображение $\mathcal{L}$ на $\mathcal{M}$ такое, что $\mathcal{L}(A^2) \geqslant 0$ для любого $A^2 = A^\dagger A \in D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{M}$. *Положительным* супероператором называется отображение $\mathcal{L}$ на $\mathcal{M}$ такое, что $\mathcal{L}$ является неотрицательным и $\mathcal{L}(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$.

Обозначим через $\mathcal{M}$ операторную алгебру. Левым супероператором, соответствующим оператору $A \in \mathcal{M}$, называется супероператор L_A на $\mathcal{M}$ такой, что $L_A(C) = AC$ для любого $C \in \mathcal{M}$. Можно рассматривать L_A как умножение слева на оператор A. Правым супероператором, соответствующим $A \in \mathcal{M}$, называется супероператор R_A на $\mathcal{M}$ такой, что $R_A(C) = CA$ для любого $C \in \mathcal{M}$.

Наиболее общее изменение состояния квантовой системы называется *квантовой операцией* [25]–[30]. Квантовая операция описывается супероператором $\widehat{\mathcal{E}}$, являющимся отображением на множестве операторов плотности. Если ρ – оператор плотности, то $\widehat{\mathcal{E}}(\rho)$ тоже должен быть оператором плотности. Любой оператор плотности $\rho_t = \rho(t)$ является самосопряженным ($\rho_t^\dagger = \rho_t$), положительным ($\rho_t > 0$) оператором с единичным следом ($\operatorname{Tr} \rho_t = 1$). Таким образом, для того чтобы супероператор $\widehat{\mathcal{E}}$ являлся квантовой операцией, необходимо выполнение следующих условий.

1. Супероператор $\widehat{\mathcal{E}}$ является действительным супероператором, т.е. $(\widehat{\mathcal{E}}(A))^\dagger = \widehat{\mathcal{E}}(A^\dagger)$ для любого A. Действительный супероператор $\widehat{\mathcal{E}}$ отображает самосопряженный оператор ρ в самосопряженный оператор $\widehat{\mathcal{E}}(\rho)$: $(\widehat{\mathcal{E}}(\rho))^\dagger = \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$.

2. Супероператор $\widehat{\mathcal{E}}$ является положительным супероператором, т.е. $\widehat{\mathcal{E}}$ отображает положительные операторы в положительные: $\widehat{\mathcal{E}}(A^2) > 0$ для любого $A \neq 0$ или $\widehat{\mathcal{E}}(\rho) \geqslant 0$.

3. Супероператор $\widehat{\mathcal{E}}$ является отображением, сохраняющим след, т.е. $(I|\widehat{\mathcal{E}}|\rho) = (\widehat{\mathcal{E}}^\dagger(I)|\rho) = 1$ или $\widehat{\mathcal{E}}^\dagger(I) = I$.

Кроме того, предположим, что супероператор $\widehat{\mathcal{E}}$ не только положительный, но и вполне положительный [53]. Супероператор $\widehat{\mathcal{E}}$ называется *вполне положительным* отображением операторного пространства $\mathcal{M}$ в себя, если

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} B_k^\dagger \widehat{\mathcal{E}}(A_k^\dagger A_l) B_l \geqslant 0$$

для любых операторов A_k, $B_k \in \mathcal{M}$ и любых целых n.

Пусть супероператор $\widehat{\mathcal{E}}$ является выпуклым линейным отображением на множестве операторов плотности, т.е.

$$\widehat{\mathcal{E}}\biggl(\sum_s \lambda_s \rho_s\biggr) = \sum_s \lambda_s \widehat{\mathcal{E}}(\rho_s),$$

где $0 < \lambda_s < 1$ для всех s и $\sum_s \lambda_s = 1$. Любое выпуклое линейное отображение операторов плотности может быть единственным образом продолжено до *линейного* отображения самосопряженных операторов. Заметим, что любой линейный вполне положительный супероператор может быть представлен в виде

$$\widehat{\mathcal{E}} = \sum_{k=1}^{m} \hat{L}_{A_k} \widehat{R}_{A_k^\dagger}, \qquad \widehat{\mathcal{E}}(\rho) = \sum_{k=1}^{m} A_k \rho A_k^\dagger.$$

Если этот супероператор сохраняет след, то

$$\sum_{k=1}^{m} A_k^{\dagger} A_k = I.$$

Поскольку все процессы происходят во времени, естественно рассматривать квантовые операции $\widehat{\mathcal{E}}(t, t_0)$, зависящие от времени. Пусть линейные супероператоры $\widehat{\mathcal{E}}(t, t_0)$ образуют вполне положительную квантовую полугруппу [54] такую, что

$$\frac{d}{dt}\,\widehat{\mathcal{E}}(t, t_0) = \hat{\Lambda}_t \widehat{\mathcal{E}}(t, t_0), \tag{2}$$

где $\hat{\Lambda}_t$ является инфинитезимальным генератором этой полугруппы [24], [36], [54]. Эволюция оператора плотности ρ описывается соотношением

$$\widehat{\mathcal{E}}(t, t_0)\rho(t_0) = \rho(t).$$

Мы будем рассматривать квантовые операции $\widehat{\mathcal{E}}(t, t_0)$ с инфинитезимальными генераторами $\hat{\Lambda}$ такими, что сопряженные супероператоры $\mathcal{L}$ являются вполне диссипативными, т.е.

$$\mathcal{L}(A_k A_l) - \mathcal{L}(A_k)A_l - A_k\mathcal{L}(A_l) \geqslant 0$$

для всех $A_1, \dots, A_n \in D(\mathcal{L})$ таких, что $A_k A_l \in D(\mathcal{L})$. Такой супероператор $\mathcal{L}$ описывает динамику наблюдаемых негамильтоновой квантовой системы. Вполне диссипативным супероператором является инфинитезимальный генератор вполне положительной полугруппы $\{\Phi_t \mid t > 0\}$, сопряженной к полугруппе $\{\widehat{\mathcal{E}}_t \mid t > 0\}$, где $\widehat{\mathcal{E}}_t = \widehat{\mathcal{E}}(t, 0)$.

3. ДРОБНАЯ СТЕПЕНЬ СУПЕРОПЕРАТОРА

Пусть $\mathcal{L}$ – линейный замкнутый супероператор с везде полной областью определения $D(\mathcal{L})$, имеющий резольвенту $R(z, \mathcal{L})$ на отрицательной полуоси и удовлетворяющий условию

$$\big\|R(-z, \mathcal{L})\big\| \leqslant \frac{M}{z}, \qquad z > 0, \qquad M > 0. \tag{3}$$

Отметим, что

$$R(-z, \mathcal{L}) = (zL_I + \mathcal{L})^{-1}.$$

Супероператор

$$\mathcal{L}^{\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} dz\, z^{\alpha-1} R(-z, \mathcal{L})\mathcal{L} \tag{4}$$

определен на $D(\mathcal{L})$ для $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{L}^{\alpha}$ называется *дробной степенью супероператора* $\mathcal{L}$ [55], [56]. Отметим, что супероператор $\mathcal{L}^{\alpha}$ допускает замыкание. Если замкнутый супероператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию (3), то $\mathcal{L}^{\alpha}\mathcal{L}^{\beta} = \mathcal{L}^{\alpha+\beta}$ для $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha + \beta < 1$.

Пусть $\mathcal{L}$ – замкнутый производящий супероператор полугруппы $\{\Phi_t \mid t \geqslant 0\}$. Тогда дробная степень $\mathcal{L}^{\alpha}$ супероператора $\mathcal{L}$ задается соотношением

$$\mathcal{L}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{\infty} dz\, z^{-\alpha-1} (\Phi_z - L_I),$$

которое называется формулой Балакришнана.

Резольвента супероператора $\mathcal{L}^\alpha$ может быть найдена с помощью соотношения

$$R(-z,\mathcal{L}^\alpha)=(zL_I+\mathcal{L}^\alpha)^{-1}= \\ =\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty dx\,\frac{x^\alpha}{z^2+2zx^\alpha\cos\pi\alpha+x^{2\alpha}}R(-x,\mathcal{L}),$$

которое называется формулой Като. Из нее следует, что выполняется неравенство

$$\|R(-z,\mathcal{L}^\alpha)\|\leqslant\frac{M}{z}\,,\qquad z>0,$$

с константой M из неравенства (3) для супероператора $\mathcal{L}$. Из неравенства

$$\|zR(-z,\mathcal{L})\|=\|z(zL_I+\mathcal{L})^{-1}\|\leqslant M$$

для всех $z>0$ следует, что супероператор $z(zL_I+\mathcal{L})^{-1}$ является равномерно ограниченным в любом секторе комплексной плоскости, заданном соотношением $|\arg z|\leqslant\phi$ для ϕ, не превышающего некоторого числа $\pi-\psi$, $0<\psi<\pi$. Тогда супероператор $zR(-z,\mathcal{L}^\alpha)$ является равномерно ограниченным в любом секторе комплексной плоскости таком, что $|\arg z|\leqslant\phi$ для $\phi<\pi-\alpha\psi$.

Пусть $\mathcal{L}$ – замкнутый производящий супероператор полугруппы $\{\Phi_t \mid t\geqslant 0\}$. Тогда супероператоры

$$\Phi_t^{(\alpha)}=\int_0^\infty ds\,f_\alpha(t,s)\Phi_s,\qquad t>0, \tag{5}$$

образуют полугруппу, в которой $\mathcal{L}^\alpha$ является инфинитезимальным генератором $\Phi_t^{(\alpha)}$. Соотношение (5) называется формулой Бохнера–Филлипса.

В формуле (5) используется функция

$$f_\alpha(t,s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}dz\,e^{sz-tz^\alpha}, \tag{6}$$

где $a,t>0$, $s\geqslant 0$, $0<\alpha<1$. Ветвь функции z^α выбрана так, что $\operatorname{Re}z^\alpha>0$ при $\operatorname{Re}z>0$. Эта ветвь является однозначной функцией на комплексной z-плоскости с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси. Сходимость этого интеграла очевидна в силу присутствия множителя e^{-tz^α}. Функция $f_\alpha(t,s)$ обладает следующими свойствами.

1. Для любого значения $s>0$ функция $f_\alpha(t,s)$ неотрицательна: $f_\alpha(t,s)\geqslant 0$.
2. Имеет место тождество

$$\int_0^\infty ds\,f_\alpha(t,s)=1.$$

3. Для $t>0$ и $x>0$ выполняется соотношение

$$\int_0^\infty ds\,e^{-sx}f_\alpha(t,s)=e^{-tx^\alpha}.$$

4. Переходя в формуле (6) к интегрированию по контуру, состоящему из двух лучей $re^{-i\theta}$ и $re^{+i\theta}$, где $r \in (0,\infty)$ и $\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi$, получаем соотношение

$$f_\alpha(t,s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr\, \exp\bigl[sr\cos\theta - tr^\alpha\cos\alpha\theta\bigr]\sin(sr\sin\theta - tr^\alpha\sin\alpha\theta + \theta). \tag{7}$$

5. Если $\alpha = 1/2$, то $\theta = \pi$ и

$$f_{1/2}(t,s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr\, e^{-sr}\sin t\sqrt{r} = \frac{t}{2\sqrt{\pi}s^{3/2}}\, e^{-t^2/(4s)},$$

что является следствием уравнения (7).

4. ДРОБНОЕ КВАНТОВОЕ МАРКОВСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Движение системы естественно описывать в терминах ее инфинитезимальных изменений. Такое изменение может описываться инфинитезимальным генератором. Одной из проблем негамильтоновой динамики является получение явного вида инфинитезимального генератора. Для этого необходимо найти наиболее общий явный вид этого супероператора. Эта задача была исследована в работах [34]–[36] для вполне диссипативных супероператоров. Линдблад показал [36], что существует взаимно однозначное соответствие между вполне положительными непрерывными по норме полугруппами и вполне диссипативными производящими супероператорами. Структурная теорема Линдблада задает наиболее общий вид вполне диссипативного супероператора.

Теорема 1. *Производящий супероператор $\mathcal{L}_V$ для вполне положительной сохраняющей единицу полугруппы $\bigl\{\Phi_t = e^{-t\mathcal{L}_V} \mid t \geqslant 0\bigr\}$ на операторном пространстве $\mathcal{M}$ может быть представлен в виде*

$$-\mathcal{L}_V(A) = -\frac{1}{i\hbar}[H,A] + \frac{1}{2\hbar}\sum_{k=1}^\infty\bigl(V_k^\dagger[A,V_k] + [V_k^\dagger,A]V_k\bigr), \tag{8}$$

где H, V_k, $\sum_k V_k^\dagger, V_k^\dagger V_k \in \mathcal{M}$.

Заметим, что вид супероператора $\mathcal{L}_V$ не фиксируется однозначно уравнением (8). Формула (8) сохраняет свой вид при преобразованиях

$$V_k \to V_k + a_k I, \qquad H \to H + \frac{1}{2i\hbar}\sum_{k=1}^\infty(a_k^* V_k - a_k V_k^\dagger),$$

где a_k – произвольные комплексные числа.

Используя оператор $A_t = \Phi_t(A)$, где $\Phi_t = e^{-t\mathcal{L}_V}$, получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}A_t = -\frac{1}{i\hbar}[H,A_t] + \frac{1}{2\hbar}\sum_{k=1}^\infty\bigl(V_k^\dagger[A_t,V_k] + [V_k^\dagger,A_t]V_k\bigr), \tag{9}$$

в котором супероператор $\mathcal{L}_V$ определяется формулой (8). Это уравнение называется *квантовым марковским уравнением* для наблюдаемой A.

Теорема Линдблада задает явный вид уравнений движения при выполнении следующих ограничений (здесь супероператор Λ_V является сопряженным к $\mathcal{L}_V$):

1) $\mathcal{L}_V$ и Λ_V являются ограниченными супероператорами;

2) $\mathcal{L}_V$ и Λ_V являются вполне диссипативными супероператорами.

Результаты Линдблада были обобщены Дэвисом [57] на случай квантовых динамических полугрупп с неограниченными производящими супероператорами.

Рассмотрим квантовое марковское уравнение (9) для наблюдаемой A_t. Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d}{dt}\,A_t = -\mathcal{L}_V(A_t), \tag{10}$$

где через $\mathcal{L}_V$ обозначен марковский супероператор

$$\mathcal{L}_V = L_H^- + \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\bigl(L_{V_k^\dagger}L_{V_k}^- - L_{V_k^\dagger}^- R_{V_k}\bigr). \tag{11}$$

Здесь мы используем супероператоры левого умножения L_V и правого умножения R_V, определенные соотношениями $L_V(A) = VA$ и $R_V(A) = AV$. Супероператор L_H^- является левым лиевым умножением на A таким, что

$$L_H^-(A) = \frac{1}{i\hbar}\,[H, A]. \tag{12}$$

Если все операторы V_k равны нулю, то $\mathcal{L}_V = L_H^-$ и из уравнений (10), (11) следуют уравнения Гейзенберга для гамильтоновой системы. В общем случае квантовая система является негамильтоновой [24].

Получим дробное обобщение квантового марковского уравнения. Для этого определим дробную степень марковского супероператора $\mathcal{L}_V$ в виде

$$-(\mathcal{L}_V)^\alpha = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty dz\, z^{\alpha-1}R(-z,\mathcal{L}_V)\mathcal{L}_V, \qquad 0<\alpha<1. \tag{13}$$

Супероператор $(\mathcal{L}_V)^\alpha$ называется *дробной степенью марковского супероператора*. Заметим, что $(\mathcal{L}_V)^\alpha(\mathcal{L}_V)^\beta = (\mathcal{L}_V)^{\alpha+\beta}$ для $\alpha,\beta>0$ и $\alpha+\beta<1$. В результате получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}\,A_t = -(\mathcal{L}_V)^\alpha(A_t), \tag{14}$$

в котором t, $H/\hbar$, $V_k/\sqrt{\hbar}$ являются безразмерными переменными. Это уравнение будем называть *дробным квантовым марковским уравнением*.

Если $V_k=0$, то уравнение (14) дает дробное уравнение Гейзенберга [18] в виде

$$\frac{d}{dt}\,A_t = -(L_H^-)^\alpha(A_t). \tag{15}$$

Супероператор $(L_H^-)^\alpha$ называется *дробной степенью левого лиевого супероператора* (12). Заметим, что это уравнение не может быть представлено в виде

$$\frac{d}{dt}\,A_t = -L_{H_{\text{new}}}^-(A_t) = \frac{i}{\hbar}\,[H_{\text{new}}, A_t]$$

с некоторым оператором H_{new}. Поэтому квантовые системы, которые описываются уравнением (15), не являются гамильтоновыми системами. Эти системы назовем *дробными гамильтоновыми квантовыми системами*. Обычные гамильтоновы квантовые системы могут рассматриваться как специальный класс дробных гамильтоновых квантовых систем. Заметим, что дробное обобщение классических гамильтоновых систем было предложено в статьях [19], [20].

Используя операторы

$$A_U(t) = U(t)A_tU^\dagger(t), \qquad W_k(t) = U(t)V_kU^\dagger(t),$$

где $U(t) = e^{1/(i\hbar)H}$, можно записать квантовое марковское уравнение в виде

$$\frac{d}{dt}\,A_U(t) = -\tilde{\mathcal{L}}_W(A_U(t)). \tag{16}$$

Супероператор

$$\tilde{\mathcal{L}}_W = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\bigl(L_{W_k^\dagger}L^-_{W_k} - L^-_{W_k^\dagger}R_{W_k}\bigr) \tag{17}$$

описывает негамильтонову часть эволюции. Уравнение (16) является квантовым марковским уравнением в представлении взаимодействия. Дробное обобщение этого уравнения имеет вид

$$\frac{d}{dt}\,A_U(t) = -(\tilde{\mathcal{L}}_W)^\alpha(A_U(t)). \tag{18}$$

Уравнение (18) является дробным квантовым марковским уравнением в представлении взаимодействия. Параметр α может рассматриваться как мера влияния окружающей среды на систему. При $\alpha = 1$ получаем обычное квантовое марковское уравнение (16). В пределе $\alpha \to 0$ получается уравнение Гейзенберга для квантовой наблюдаемой A_t гамильтоновой системы. Следующие случаи могут рассматриваться в квантовой теории: 1) отсутствие влияния окружающей среды ($\alpha = 0$); 2) полное влияние окружающей среды ($\alpha = 1$); 3) степенное экранирование влияния окружения ($0 < \alpha < 1$). Физическая интерпретация дробного уравнения (18) может быть связана с существованием степенного экранирования воздействия окружающей среды на квантовую систему.

5. ДРОБНАЯ ПОЛУГРУППА

Если рассматривается задача Коши для уравнения (10), в котором начальное условие задается в момент времени $t = 0$ оператором A_0, то решение этой задачи может быть записано в виде $A_t = \Phi_t A_0$. Однопараметрические супероператоры Φ_t при $t \geqslant 0$ обладают свойствами

$$\Phi_t\Phi_s = \Phi_{t+s}, \qquad t,s > 0, \qquad \Phi_0 = L_I.$$

В результате супероператоры Φ_t образуют полугруппу, а супероператор $\mathcal{L}_V$ является производящим супероператором полугруппы $\bigl\{\Phi_t \mid t \geqslant 0\bigr\}$.

Рассмотрим задачу Коши для дробного квантового марковского уравнения (14), в котором начальное условие задается оператором A_0. Решение этой задачи может быть представлено в виде

$$A_t(\alpha) = \Phi_t^{(\alpha)} A_0,$$

где супероператоры $\Phi_t^{(\alpha)}$, $t > 0$, образуют полугруппу, которую назовем *дробной полугруппой*. Супероператор $-(\mathcal{L}_V)^\alpha$ является производящим супероператором полугруппы $\{\Phi_t^{(\alpha)} \mid t \geqslant 0\}$. Рассмотрим некоторые свойства дробной полугруппы $\{\Phi_t^{(\alpha)} \mid t > 0\}$.

Супероператоры $\Phi_t^{(\alpha)}$ могут быть построены по супероператорам Φ_t с помощью формулы Бохнера–Филлипса (5), в которой $f_\alpha(t,s)$ определяется формулой (6). Если A_t является решением квантового марковского уравнения (10), то формула (5) дает решение

$$A_t(\alpha) = \int_0^\infty ds\, f_\alpha(t,s) A_s, \qquad t > 0,$$

дробного квантового марковского уравнения (14).

Линейный супероператор $\Phi_t^{(\alpha)}$ является вполне положительным, если

$$\sum_{i,j} B_i \Phi_t^{(\alpha)}(A_i^\dagger A_j) B_j \geqslant 0$$

для любых $A_i, B_i \in \mathcal{M}$. Следующая теорема утверждает, что дробная полугруппа тоже является вполне положительной.

Теорема 2. *Если $\{\Phi_t \mid t > 0\}$ является вполне положительной полугруппой супероператоров Φ_t на $\mathcal{M}$, то дробные супероператоры $\Phi_t^{(\alpha)}$ образуют вполне положительную полугруппу $\{\Phi_t^{(\alpha)} \mid t > 0\}$.*

Доказательство. Формула Бохнера–Филлипса (5) приводит к соотношению

$$\sum_{i,j} B_i \Phi_t^{(\alpha)}(A_i^\dagger A_j) B_j = \int_0^\infty ds\, f_\alpha(t,s) \sum_{i,j} B_i \Phi_s(A_i^\dagger A_j) B_j$$

для всех $t > 0$. Используя неравенства

$$\sum_{i,j} B_i \Phi_s(A_i^\dagger A_j) B_j \geqslant 0, \qquad f_\alpha(t,s) \geqslant 0, \qquad s > 0,$$

получаем

$$\sum_{i,j} B_i \Phi_t^{(\alpha)}(A_i^\dagger A_j) B_j \geqslant 0.$$

Следствие. *Если Φ_t, $t > 0$, является неотрицательным однопараметрическим супероператором, т.е. $\Phi_t(A) \geqslant 0$ при $A \geqslant 0$, то супероператор $\Phi_t^{(\alpha)}$ является неотрицательным, т.е. $\Phi_t^{(\alpha)}(A) \geqslant 0$ при $A \geqslant 0$.*

Используя формулу Бохнера–Филлипса и свойство $f_\alpha(t,s) \geqslant 0$, $s > 0$, легко доказать, что супероператор $\Phi_t^{(\alpha)}$ неотрицателен, если Φ_t, $t > 0$, является неотрицательным однопараметрическим супероператором. Это следствие может быть также доказано, если положить $B_1 = I$, $A_1 = A$, $A_i = B_i = 0$, $i = 2, 3, \ldots$, в приведенном доказательстве теоремы.

В квантовой теории наиболее важным является класс действительных операторов. Пусть $A^\dagger \in \mathcal{M}^*$ является супероператором, сопряженным к $A \in \mathcal{M}$. Действительным супероператором является супероператор Φ_t на $\mathcal{M}$ такой, что $(\Phi_t A)^\dagger = \Phi_t(A^\dagger)$ для любого $A \in D(\Phi_t) \subset \mathcal{M}$. Квантовая наблюдаемая является самосопряженным оператором. Если Φ_t – действительный супероператор и A – самосопряженный оператор ($A^\dagger = A$), то оператор $A_t = \Phi_t A$ является самосопряженным, т.е. $(\Phi_t A)^\dagger = \Phi_t A$. Пусть $\mathcal{M}$ – множество квантовых наблюдаемых. Супероператоры на $\mathcal{M}$ должны быть действительными, так как квантовая динамика, т.е. эволюция квантовых наблюдаемых во времени, должна описываться действительными супероператорами.

Теорема 3. *Если Φ_t является действительным супероператором, то супероператор $\Phi_t^{(\alpha)}$ тоже действительный.*

Доказательство. Формула Бохнера–Филлипса приводит к соотношению

$$\bigl(\Phi_t^{(\alpha)} A\bigr)^\dagger = \int_0^\infty ds\, f_\alpha^*(t,s)(\Phi_s A)^\dagger, \qquad t > 0.$$

Используя уравнение (7), легко показать, что функция $f_\alpha^*(t,s) = f_\alpha(t,s)$ является вещественнозначной. Тогда соотношение $(\Phi_t A)^\dagger = \Phi_t A^\dagger$ приводит к $\bigl(\Phi_t^{(\alpha)} A\bigr)^\dagger = \Phi_t^{(\alpha)}(A^\dagger)$ для любого $A \in D\bigl(\Phi_t^{(\alpha)}\bigr) \subset \mathcal{M}$.

Если Φ_t – супероператор на операторном гильбертовом пространстве $\mathcal{M}$, то *сопряженным супероператором* к Φ_t называется супероператор $\widehat{\mathcal{E}}_t$ на $\mathcal{M}^*$ такой, что

$$(\widehat{\mathcal{E}}_t(A)|B) = (A|\Phi_t(B)) \tag{19}$$

для любого $B \in D(\Phi_t) \subset \mathcal{M}$ и $A \in \mathcal{M}^*$. Используя формулу Бохнера–Филлипса, получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Если $\widehat{\mathcal{E}}_t$ – супероператор, сопряженный к Φ_t, то супероператор*

$$\widehat{\mathcal{E}}_t^{(\alpha)} = \int_0^\infty ds\, f_\alpha(t,s)\widehat{\mathcal{E}}_s, \qquad t > 0,$$

является сопряженным к $\Phi_t^{(\alpha)}$.

Доказательство. Пусть супероператор $\widehat{\mathcal{E}}_t$ сопряжен к Φ_t, т.е. выполняется соотношение (19). Тогда

$$\bigl(\widehat{\mathcal{E}}_t^{(\alpha)} A|B\bigr) = \int_0^\infty ds\, f_\alpha(t,s)(\widehat{\mathcal{E}}_s A|B) = \int_0^\infty ds\, f_\alpha(t,s)(A|\Phi_s B) = \bigl(A|\Phi_t^{(\alpha)} B\bigr).$$

Известно, что $\widehat{\mathcal{E}}_t$ является действительным супероператором, если супероператор Φ_t действительный. Аналогично, если $\Phi_t^{(\alpha)}$ является действительным супероператором, то супероператор $\widehat{\mathcal{E}}_t^{(\alpha)}$ действителен.

Пусть $\left\{\widehat{\mathcal{E}}_t \mid t > 0\right\}$ – вполне положительная полугруппа такая, что оператор плотности $\rho_t = \widehat{\mathcal{E}}_t \rho_0$ описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}\,\rho_t = -\hat{\Lambda}_V \rho_t, \tag{20}$$

в котором $\hat{\Lambda}_V$ является сопряженным к марковскому супероператору $\mathcal{L}_V$. Супероператор $\hat{\Lambda}_V$ может быть представлен в виде

$$\hat{\Lambda}_V \rho_t = -\frac{1}{i\hbar}\,[H, \rho_t] + \frac{1}{\hbar}\sum_{k=1}^{\infty}(V_k \rho_t V_k^{\dagger} - (\rho_t V_k^{\dagger} V_k + V_k^{\dagger} V_k \rho_t)).$$

Заметим, что уравнение (20) при $V_k = 0$ дает уравнение фон Неймана

$$\frac{d}{dt}\,\rho_t = \frac{1}{i\hbar}\,[H, \rho_t].$$

Полугруппа $\left\{\widehat{\mathcal{E}}_t^{(\alpha)} \mid t > 0\right\}$ описывает эволюцию оператора плотности $\rho_t(\alpha) = \widehat{\mathcal{E}}_t^{(\alpha)} \rho_0$ с помощью дробного уравнения

$$\frac{d}{dt}\,\rho_t(\alpha) = -(\hat{\Lambda}_V)^{\alpha} \rho_t(\alpha).$$

Это уравнение называется *дробным квантовым марковским уравнением для оператора плотности*. При $V_k = 0$, получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}\,\rho_t = -(-L_H^-)^{\alpha} \rho_t,$$

которое может быть названо *дробным уравнением фон Неймана.*

6. ДРОБНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Рассмотрим квантовый гармонический осциллятор такой, что

$$H = \frac{1}{2m}\,P^2 + \frac{m\omega^2}{2}\,Q^2, \qquad V_k = 0, \tag{21}$$

где t и P являются безразмерными переменными. Тогда уравнение (14) (см. также уравнение (15)) описывает гармонический осциллятор. При $A = Q$ и $A = P$ уравнение (14) для $\alpha = 1$ принимает вид

$$\frac{d}{dt}\,Q_t = \frac{1}{m}\,P_t, \qquad \frac{d}{dt}\,P_t = -m\omega^2 Q_t.$$

Решения этих уравнений хорошо известны:

$$Q_t = Q_0 \cos\omega t + \frac{1}{m\omega}\,P_0 \sin\omega t, \qquad P_t = P_0 \cos\omega t - m\omega Q_0 \sin\omega t. \tag{22}$$

Используя эти решения и формулу Бохнера–Филлипса, можно получить решения дробных уравнений

$$\frac{d}{dt}\,Q_t = -(L_H^-)^\alpha Q_t, \qquad \frac{d}{dt}\,P_t = -(L_H^-)^\alpha P_t, \tag{23}$$

где H задано в (21). Решения дробных уравнений (23) имеют вид

$$Q_t(\alpha) = \Phi_t^{(\alpha)} Q_0 = \int_0^\infty ds\, f_\alpha(t,s) Q_s, \qquad P_t(\alpha) = \Phi_t^{(\alpha)} P_0 = \int_0^\infty ds\, f_\alpha(t,s) P_s. \tag{24}$$

Подстановка (22) в (24) дает уравнения [18]

$$Q_t = Q_0 C_\alpha(t) + \frac{1}{m\omega}\,P_0 S_\alpha(t), \qquad P_t = P_0 C_\alpha(t) - m\omega Q_0 S_\alpha(t), \tag{25}$$

где

$$C_\alpha(t) = \int_0^\infty ds\, f_\alpha(t,s)\cos\omega s, \qquad S_\alpha(t) = \int_0^\infty ds\, f_\alpha(t,s)\sin\omega s.$$

Формулы (25) описывают решение дробных уравнений (23) для квантового гармонического осциллятора. При $\alpha = 1/2$ имеем

$$C_{1/2}(t) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty ds\, \frac{\cos\omega s}{s^{3/2}}\, e^{-t^2/(4s)},$$

$$S_{1/2}(t) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty ds\, \frac{\sin\omega s}{s^{3/2}}\, e^{-t^2/(4s)}.$$

Эти функции можно выразить через функцию Макдональда (см. [58], раздел 2.5.37.1), которая также называется модифицированной функцией Бесселя третьего рода.

Нетрудно получить математические ожидания

$$\langle Q_t\rangle = x_0 C_\alpha(t) + \frac{1}{m\omega}\,p_0 S_\alpha(t), \qquad \langle P_t\rangle = p_0 C_\alpha(t) - m\omega x_0 S_\alpha(t)$$

и дисперсии

$$D_t(Q) = \frac{a^2}{2}\,C_\alpha^2(t) + \frac{\hbar^2}{2a^2m^2\omega^2}\,S_\alpha^2(t), \qquad D_t(P) = \frac{\hbar^2}{2a^2}\,C_\alpha^2(t) + \frac{a^2m^2\omega^2}{2}\,S_\alpha^2(t).$$

Здесь были использованы координатное представление и чистое состояние

$$\Psi(x) = \langle x|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}}\,\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2a} + \frac{i}{\hbar}\,p_0 x\right]. \tag{26}$$

Математическое ожидание и дисперсия определяются обычным образом.

7. ДРОБНОЕ КВАНТОВОЕ МАРКОВСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРА С ТРЕНИЕМ

Рассмотрим дробное квантовое марковское уравнение с $V_k \neq 0$. Основным условием является то, что общий вид ограниченного вполне диссипативного супероператора, задаваемого квантовым марковским уравнением, сохраняется и для неограниченных вполне диссипативных супероператоров $\mathcal{L}_V$. Другим условием, налагаемым на операторы H, V_k, является то, что они являются функциями операторов Q и P такого вида, что получаемая модель является точно решаемой [37], [38] (см. также [39], [40]). Мы полагаем, что $V_k = V_k(Q, P)$ являются полиномами первого порядка по Q и P и $H = H(Q, P)$ является полиномом второго порядка по Q и P. Эти предположения аналогичны используемым в классической динамике, когда рассматриваются силы трения, пропорциональные скорости. В результате H и V_k задаем в виде

$$H = \frac{1}{2m}\, P^2 + \frac{m\omega^2}{2}\, Q^2 + \frac{\mu}{2}\,(PQ + QP), \qquad V_k = a_k P + b_k Q, \tag{27}$$

где a_k, b_k – комплексные числа, $k = 1, 2$. Легко получить, что

$$\mathcal{L}_V Q = \frac{1}{m}\, P + \mu Q - \lambda Q, \qquad \mathcal{L}_V P = -m\omega^2 Q - \mu P - \lambda P,$$

где

$$\lambda = \operatorname{Im}\biggl(\sum_{k=1}^{2} a_k b_k^*\biggr) = -\operatorname{Im}\biggl(\sum_{k=1}^{2} a_k^* b_k\biggr).$$

Используя матрицы

$$A = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \mu - \lambda & 1/m \\ -m\omega^2 & -\mu - \lambda \end{pmatrix},$$

квантовое марковское уравнение для A_t приводим к виду

$$\frac{d}{dt}\, A_t = M A_t, \tag{28}$$

где $\mathcal{L}_V A_t = M A_t$. Решение уравнения (28) дается формулой

$$A_t = \Phi_t A_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\, \mathcal{L}_V^n A_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\, M^n A_0.$$

Матрица M может быть представлена как $M = N^{-1} F N$, где F – диагональная матрица. Определим комплексный параметр ν такой, что $\nu^2 = \mu^2 - \omega^2$. Тогда имеем

$$N = \begin{pmatrix} m\omega^2 & \mu + \nu \\ m\omega^2 & \mu - \nu \end{pmatrix}, \qquad N^{-1} = \frac{1}{2m\omega^2\nu} \begin{pmatrix} -(\mu - \nu) & \mu + \nu \\ m\omega^2 & -m\omega^2 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} -(\lambda + \nu) & 0 \\ 0 & -(\lambda - \nu) \end{pmatrix}.$$

Учитывая формулу

$$\Phi_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\, M^n = N^{-1} \biggl(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\, F^n\biggr) N,$$

подставляем супероператор Φ_t в виде

$$\Phi_t = e^{tM} = N^{-1} e^{tF} N = e^{-\lambda t} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\nu t + \frac{\mu}{\nu}\operatorname{sh}\nu t & \frac{1}{\mu\nu}\operatorname{sh}\nu t \\ -\frac{m\omega^2}{\nu}\operatorname{sh}\nu t & \operatorname{ch}\nu t - \frac{\mu}{\nu}\operatorname{sh}\nu t \end{pmatrix}.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} Q_t &= e^{-\lambda t}\left[\operatorname{ch}\nu t + \frac{\mu}{\nu}\operatorname{sh}\nu t\right]Q_0 + \frac{1}{m\nu}\,e^{-\lambda t}\operatorname{sh}(\nu t)P_0, \\ P_t &= -\frac{m\omega^2}{\nu}\,e^{-\lambda t}\operatorname{sh}(\nu t)Q_0 + e^{-\lambda t}\left[\operatorname{ch}\nu t - \frac{\mu}{\nu}\operatorname{sh}\nu t\right]P_0. \end{aligned} \tag{29}$$

Дробные квантовые марковские уравнения для Q_t и P_t имеют вид

$$\frac{d}{dt}\,Q_t = -(\mathcal{L}_V)^\alpha Q_t, \qquad \frac{d}{dt}\,Q_t = -(\mathcal{L}_V)^\alpha Q_t, \tag{30}$$

где t и $V_k/\sqrt{\hbar}$ – безразмерные переменные. Решения этих дробных уравнений задаются с помощью формулы Бохнера–Филлипса соотношениями

$$\begin{aligned} Q_t(\alpha) &= \Phi_t^{(\alpha)}Q_0 = \int_0^\infty ds\, f_\alpha(t,s)Q_s, \qquad t>0, \\ P_t(\alpha) &= \Phi_t^{(\alpha)}P_0 = \int_0^\infty ds\, f_\alpha(t,s)P_s, \qquad t>0, \end{aligned} \tag{31}$$

где Q_s и P_s заданы в (29), а функция $f_\alpha(t,s)$ задана в (6). Подстановка (29) в (31) дает

$$\begin{aligned} Q_t(\alpha) &= \left[\operatorname{Ch}_\alpha(t) + \frac{\mu}{\nu}\,\operatorname{Sh}_\alpha(t)\right]Q_0 + \frac{1}{m\nu}\,\operatorname{Ch}_\alpha(t)P_0, \\ P_t(\alpha) &= -\frac{m\omega^2}{\nu}\,\operatorname{Sh}_\alpha(t)Q_0 + \left[\operatorname{Ch}_\alpha(t) - \frac{\mu}{\nu}\,\operatorname{Sh}_\alpha(t)\right]P_0, \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$\operatorname{Ch}_\alpha(t) = \int_0^\infty ds\, f_\alpha(t,s)e^{-\lambda s}\operatorname{ch}\nu s,$$

$$\operatorname{Sh}_\alpha(t) = \int_0^\infty ds\, f_\alpha(t,s)e^{-\lambda s}\operatorname{sh}\nu s.$$

При $\alpha = 1/2$ имеем

$$\operatorname{Ch}_{1/2}(t) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty ds\,\frac{\operatorname{ch}\nu s}{s^{3/2}}\,e^{-t^2/(4s)-\lambda s},$$

$$\operatorname{Sh}_{1/2}(t) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty ds\,\frac{\operatorname{sh}\nu s}{s^{3/2}}\,e^{-t^2/(4s)-\lambda s}.$$

Эти функции могут быть представлены через функцию Макдональда (см. [58], раздел 2.4.17.2) таким образом, что

$$\operatorname{Ch}_{1/2}(t) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}}\,[V(t,\lambda,-\nu) + V(t,\lambda,\nu)],$$

$$\operatorname{Sh}_{1/2}(t) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}}\,[V(t,\lambda,-\nu) - V(t,\lambda,\nu)],$$

где использовано обозначение

$$V(t,\lambda,\nu) = \left(\frac{t^2+4\nu}{4\lambda}\right)^{1/4} K_{-1/2}\left(2\sqrt{\frac{\lambda(t^2+4\nu)}{4}}\right),$$

$\mathrm{Re}\, t^2 > \mathrm{Re}\, \nu$, $\mathrm{Re}\, \lambda > 0$, и $K_\alpha(z)$ – функция Макдональда [1], [2].

В результате формулы (32) определяют решение дробного квантового марковского уравнения для гармонического осциллятора с трением.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Квантовая динамика может описываться на языке супероператоров. Супероператором называется отображение, которое сопоставляет каждому оператору в точности один оператор. Естественно описывать движение в терминах инфинитезимальных изменений системы. Уравнения движения для квантовой наблюдаемой называются уравнениями Гейзенберга. Для квантовых гамильтоновых систем инфинитезимальный супероператор является некоторой формой дифференцирования. Дифференцированием называется линейное отображение $\mathcal{L}$, удовлетворяющее правилу Лейбница $\mathcal{L}(AB) = (\mathcal{L}A)B + A(\mathcal{L}B)$ для любых операторов A и B. Известно, что инфинитезимальный генератор $\mathcal{L} = 1/(i\hbar)[H,\cdot]$, используемый для описания гамильтоновых систем, является дифференцированием квантовых наблюдаемых. Можно рассмотреть [18] дробное дифференцирование на множестве наблюдаемых как дробную степень $\mathcal{L}^\alpha$ дифференцирования $\mathcal{L} = 1/(i\hbar)[H,\cdot]$. В результате получаем дробное обобщение уравнения Гейзенберга [18]. Это уравнение позволяет обобщить понятие квантовой гамильтоновой системы. В общем случае квантовая система является негамильтоновой, а супероператор $\mathcal{L}$ не является дифференцированием. Для широкого класса квантовых систем инфинитезимальный генератор $\mathcal{L}$ является вполне диссипативным [21]–[24]. В настоящей работе рассмотрено дробное обобщение уравнений движения для квантовых негамильтоновых систем. При этом обобщении использовалась дробная степень вполне диссипативного супероператора.

В работе предложено обобщение квантового марковского уравнения для квантовой наблюдаемой. В полученном уравнении используется супероператор, являющийся дробной степенью вполне диссипативного супероператора. Доказано, что предлагаемый супероператор является инфинитезимальным генератором вполне положительной полугруппы. Описаны свойства этой полугруппы. Предложенное дробное квантовое марковское уравнение точно решается для гармонического осциллятора с линейным трением. Дробный показатель степени квантового марковского супероператора может рассматриваться как параметр, описывающий меру экранирования окружения квантовой системы. Можно выделить следующие случаи: при $\alpha = 0$ – отсутствие влияния окружения на квантовую систему; при $\alpha = 1$ – полное влияние окружения; при $0 < \alpha < 1$ – степенное экранирование влияния окружения на систему. Таким образом, физической интерпретацией дробной степени квантового марковского супероператора является однопараметрическое описание экранирования взаимодействия квантовой системы с окружающей средой.

Заметим, что квантовое марковское уравнение описывает взаимодействие квантовой системы и окружения (см. [32]). Другая физическая интерпретация дробной степени инфинитезимального генератора связана с формулой Бохнера–Филлипса (5) и заключается в следующем. Используя свойства

$$\int_0^\infty f_\alpha(t,s) = 1, \qquad f_\alpha(t,s) \geqslant 0, \qquad s > 0,$$

можно рассматривать функцию $f_\alpha(t,s)$ как плотность распределения вероятности. Тогда формула Бохнера–Филлипса (5) может рассматриваться как сглаживание эволюции, описываемой супероператором Φ_t, по временному параметру $s > 0$. Это сглаживание можно интерпретировать как экранирование окружения квантовой системы.

Функция $f_\alpha(t,s)$ может быть представлена с помощью репараметризации как распределение Леви. Отметим, что распределения Леви являются решениями дробных уравнений (см., например, [13], [59]–[61]), описывающих аномальную диффузию. Известно, что квантовые марковские уравнения используются для описания броуновского движения квантовых систем [37]. Возможно, что дробное обобщение квантового марковского уравнения может быть использовано для описания аномальных процессов и случайных блужданий [13]–[16] в квантовых системах.

Список литературы

[1] K. B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus. Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Math. Sci. Eng., **111**, Academic Press, New York, 1974.

[2] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach, New York, 1993.

[3] B. Ross, "A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus", *Fractional Calculus and Its Applications*, Lecture Notes in Math., **457**, Springer, Berlin, 1975, 1–36.

[4] K. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley and Sons, New York, 1993.

[5] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Math. Sci. Eng., **198**, Academic Press, San Diego, 1999.

[6] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, North-Holland Math. Stud., **204**, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[7] V. Kiryakova, *Generalized Fractional Calculus and Applications*, Pitman Research Notes Math. Ser., **301**, Longman Scientific and Technical, Harlow, 1993; B. Rubin, *Fractional Integrals and Potentials*, Pitman Monogr. Surv. Pure Appl. Math., **82**, Harlow, Longman, 1996; A. C. McBride, *Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions*, Research Notes Math., **31**, Pitman, San Francisco, 1979.

[8] K. Nishimoto, *Fractional Calculus. Integrations and Differentiations of Arbitrary Order*, Descartes Press, Koriyama, 1989.

[9] G. M. Zaslavsky, *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2005.

[10] R. Gorenflo, F. Mainardi, "Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order", *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, CISM Courses and Lectures, **378**, eds. A. Carpinteri, F. Mainardi, Springer, Wien, 1997, 223–276.

[11] B. West, M. Bologna, P. Grigolini, *Physics of Fractal Operators*, Inst. Nonlinear Sci., Springer, New York, 2003.

[12] R. Hilfer (ed.), *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.
[13] G. M. Zaslavsky, *Phys. Rep.*, **371**:6 (2002), 461–580.
[14] E. W. Montroll, M. F. Shlesinger, "On the wonderful world of random walks", *Nonequilibrium Phenomena*. II. *From Stochastics to Hydrodynamics*, Stud. Statist. Mech., **11**, eds. J. Lebowitz, E. Montroll, North-Holland, Amsterdam, 1984, 1–121.
[15] R. Metzler, J. Klafter, *Phys. Rep.*, **339**:1 (2000), 1–77.
[16] R. Metzler, J. Klafter, *J. Phys. A*, **37**:31 (2004), R161–R208.
[17] V. E. Tarasov, *Internat. J. Math.*, **18**:3 (2007), 281–299.
[18] V. E. Tarasov, *Phys. Lett. A*, **17** (2008), 2984–2988.
[19] V. E. Tarasov, *J. Phys. A*, **38**:26 (2005), 5929–5943.
[20] V. E. Tarasov, *J. Phys. A*, **39**:26 (2006), 8409–8425.
[21] A. Kossakowski, *Rep. Math. Phys.*, **3**:4 (1972), 247–274.
[22] E. B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Academic Press, London, New York, San Francisco, 1976.
[23] R. S. Ingarden, A. Kossakowski, *Ann. Phys.*, **89**:2 (1975), 451–485.
[24] V. E. Tarasov, *Quantum Mechanics of Non-Hamiltonian and Dissipative Systems*, Elsevier, Amsterdam, London, 2008.
[25] K.-E. Hellwing, K. Kraus, *Comm. Math. Phys.*, **11**:3 (1969), 214–220.
[26] K.-E. Hellwing, K. Kraus, *Comm. Math. Phys.*, **16**:2 (1970), 142–147.
[27] K. Kraus, *Ann. Phys.*, **64**:2 (1971), 311–335.
[28] K. Kraus, *States, Effects, and Operations. Fundamental Notions of Quantum Theory*, Lecture Notes in Phys., **190**, Springer, Berlin, 1983.
[29] B. Schumacher, *Phys. Rev. A*, **54**:4 (1996), 2614–2628.
[30] V. E. Tarasov, *J. Phys. A*, **35**:25 (2002), 5207–5235.
[31] V. E. Tarasov, *J. Phys. A*, **37**:9 (2004), 3241–3257.
[32] L. Accardi, Y. G. Lu, I. V. Volovich, *Quantum Theory and Its Stochastic Limit*, Springer, New York, 2002.
[33] U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems*, Ser. Modern Condensed Matter Phys., **2**, World Scientific, Singapore, 1993.
[34] V. Gorini, A. Kossakowski, E. C. G. Sudarshan, *J. Math. Phys.*, **17**:5 (1976), 821–825.
[35] V. Gorini, A. Frigerio, M. Verri, A. Kossakowski, E. C. G. Sudarshan, *Rep. Math. Phys.*, **13**:2 (1978), 149–173.
[36] G. Lindblad, *Comm. Math. Phys.*, **48**:2 (1976), 119–130.
[37] G. Lindblad, *Rep. Math. Phys.*, **10**:3 (1976), 393–406.
[38] A. Sandulescu, H. Scutaru, *Ann. Phys.*, **173**:2 (1987), 277–317.
[39] A. Isar, A. Sandulescu, H. Scutaru, E. Stefanescu, W. Scheid, *Internat. J. Modern Phys. E*, **3**:2 (1994), 635–714.
[40] A. Isar, A. Sandulescu, W. Scheid, *Internat. J. Modern Phys. E*, **10**:22 (1996), 2767–2779.
[41] E. B. Davies, *Ann. Inst. H. Poincarè Sect. A*, **35**:2 (1981), 149–171.
[42] D. A. Lidar, Z. Bihary, K. B. Whaley, *Chem. Phys.*, **268**:1–3 (2001), 35–53.
[43] H. Nakazato, Y. Hida, K. Yuasa, B. Militello, A. Napoli, A. Messina, *Phys. Rev. A*, **74**:6 (2006), 062113.
[44] K. Dietz, *J. Phys. A*, **35**:49 (2002), 10573–10590.
[45] V. E. Tarasov, *Phys. Rev. E*, **66**:5 (2002), 056116.
[46] E. B. Davies, *Comm. Math. Phys.*, **19**:2 (1970), 83–105.
[47] H. Spohn, *Rep. Math. Phys.*, **10**:2 (1976), 189–194.
[48] H. Spohn, *Lett. Math. Phys.*, **2**:1 (1977), 33–38.
[49] C. Anastopoulous, J. J. Halliwell, *Phys. Rev. D*, **51**:12 (1995), 6870–6885.
[50] V. E. Tarasov, G. M. Zaslavsky, *Physica A*, **368**:2 (2006), 399–415.
[51] A. Tofighi, H. N. Pour, *Physica A*, **374**:1 (2007), 41–45.
[52] A. Tofighi, A. Golestani, *Physica A*, **387**:8–9 (2008), 1807–1817.

[53] W. Arveson, *Pacific J. Math.*, **203**:1 (2002), 67–77.
[54] R. Alicki, K. Lendi, *Quantum Dynamical Semigroups and Applications*, Lecture Notes in Phys., **286**, Springer, Berlin, 1987.
[55] E. Hille, R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semigroups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31**, AMS, Providence, 1957.
[56] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.
[57] E. B. Davies, *Rep. Math. Phys.*, **11**:2 (1977), 169–188.
[58] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*. Т. 1. *Элементарные функции*, 2-е изд., Наука, М., 2002.
[59] A. I. Saichev, G. M. Zaslavsky, *Chaos*, **7**:4 (1997), 753–764.
[60] V. E. Tarasov, G. M. Zaslavsky, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **13**:2 (2008), 248–258.
[61] V. V. Yanovsky, A. V. Chechkin, D. Schertzer, A. V. Tur, *Physica A*, **282**:1–2 (2000), 13–34.

Поступила в редакцию 27.03.2008,
после доработки 23.06.2008