ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 158, № 3
март, 2009

 В. Е. Тарасов*

ДРОБНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Доказано, что электромагнитные поля в диэлектрических средах, восприимчивость которых в широком частотном диапазоне подчиняется дробно-степенной зависимости, описываются дифференциальными уравнениями с производными нецелого порядка по времени. Получены дробные интегро-дифференциальные уравнения для электромагнитных волн в диэлектрике. Электромагнитные поля в диэлектриках демонстрируют дробно-степенную релаксацию. Дробные интегро-дифференциальные уравнения для электромагнитных волн являются общими для широкого класса диэлектрических сред независимо от физической структуры, химического состава или природы поляризации (дипольная, электронная или ионная).

Ключевые слова: дробное интегро-дифференцирование, дробное затухание, универсальный ответ, электромагнитное поле, диэлектрические среды.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1912 г. Дебай сформулировал теорию дипольной релаксации в диэлектриках [1]. Большое количество проведенных измерений диэлектрической релаксации показывает, что классическое дебаевское поведение почти никогда не наблюдается экспериментально [2]–[4]. Фактически оказывается, что различные диэлектрики демонстрируют степенные закономерности, подтверждая диэлектрические измерения Джошера [2], [3] для широкого класса различных веществ.

Для большинства материалов диэлектрическая восприимчивость в широкой частотной области подчиняется дробно-степенному закону, называемому универсальным ответом [2], [3]. Эта закономерность была обнаружена в биполярных средах вне области частот пиковой потери и в средах, где поляризация является результатом движений ионных или электронных носителей зарядов. Было показано [5], что частотная зависимость диэлектрической восприимчивости $\widetilde{\chi}(\omega) = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega)$

*Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: tarasov@theory.sinp.msu.ru

подчиняется общим универсальным законам для широкого класса сред. А именно, закономерности, описываемые соотношениями

$$\chi'(\omega) \sim \omega^{n-1}, \qquad \chi''(\omega) \sim \omega^{n-1}, \quad \omega \gg \omega_p, \tag{1}$$

$$\chi'(0) - \chi'(\omega) \sim \omega^{m}, \qquad \chi''(\omega) \sim \omega^{m}, \qquad \omega \ll \omega_p, \tag{2}$$

где $\chi'(0)$ – статическая поляризация, $0 < n, m < 1$, ω_p – частота пика потерь, наблюдаются в широком диапазоне частот. Отметим, что отношение мнимой и действительной компонент восприимчивости не зависит от частоты. Частотная зависимость, заданная соотношением (1), подразумевает, что мнимая и действительная части комплексной восприимчивости при больших частотах подчиняются соотношению

$$\frac{\chi''(\omega)}{\chi'(\omega)} = \operatorname{cth} \frac{\pi n}{2}, \qquad \omega \gg \omega_p. \tag{3}$$

Экспериментальная зависимость (2) приводит к похожему правилу частотной независимости для низкочастотной области:

$$\frac{\chi''(\omega)}{\chi'(0) - \chi'(\omega)} = \operatorname{th} \frac{\pi m}{2}\,, \qquad \omega \ll \omega_p. \tag{4}$$

Законы универсального ответа диэлектрических сред [2], [3] могут описываться методами дробного математического анализа [6]. Теория интегралов и производных нецелого порядка восходит к работам Лейбница, Лиувилля, Римана, Грюнвальда и Летникова [6]. Дробный математический анализ находит множество применений в современных исследованиях в механике и физике. Интерес к дробным интегро-дифференциальным уравнениям непрерывно растет в последние годы в силу их многочисленных приложений. В короткий период времени список применений стал очень большим (см., например, [7]–[9]). Отметим работы [10]–[13], в которых дробный математический анализ был применен для объяснения природы неэкспоненциальных релаксаций и были получены уравнения, содержащие дробное интегрирование и дифференцирование.

В настоящей работе показано, что дробно-степенная частотная зависимость приводит к интегро-дифференциальным уравнениям с производными и интегралами нецелого порядка по времени. Выводятся дробные дифференциальные уравнения, которые описывают электромагнитные волны в широком классе диэлектрических сред. Степенные законы Джошера представляются дробными интегро-дифференциальными уравнениями. Электромагнитные поля в диэлектрических средах демонстрируют универсальное затухание с дробными показателями. Предлагаемые дробные уравнения являются общими (универсальными) для широкого класса материалов независимо от их физической структуры, химического состава или природы их поляризации.

2. ДРОБНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ

Рассмотрим уравнения (1) и (3). Для области $\omega \gg \omega_p$ универсальный дробно-степенной закон (1) может быть представлен в виде

$$\widetilde{\chi}(\omega) = \chi_\alpha (i\omega)^{-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{5}$$

с некоторыми положительными постоянными χ_α и $\alpha = 1 - n$, где

$$(i\omega)^\alpha = |\omega|^\alpha e^{i\alpha\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)/2}.$$

Легко увидеть, что соотношение (3) справедливо для закона (5).

Плотность поляризации $\mathbf{P}(t,r)$ может быть записана в виде

$$\mathbf{P}(t,r) = \mathcal{F}^{-1}(\widetilde{\mathbf{P}}(\omega,r)) = \varepsilon_0\mathcal{F}^{-1}(\widetilde{\chi}(\omega)\widetilde{\mathbf{E}}(\omega,r)), \tag{6}$$

где $\widetilde{\mathbf{P}}(\omega,r)$ – преобразование Фурье $\mathcal{F}$ функции $\mathbf{P}(t,r)$. При подстановке соотношения (5) в уравнение (6) получаем

$$\mathbf{P}(t,r) = \varepsilon_0\chi_\alpha\mathcal{F}^{-1}((i\omega)^{-\alpha}\widetilde{\mathbf{E}}(\omega,r)).$$

Заметим, что преобразование Фурье дробного интеграла Лиувилля [6], [14]

$$(I_+^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{t}\frac{f(t')\,dt'}{(t-t')^{1-\alpha}}$$

задается следующим соотношением (см. [6], теорема 7.1 и [14], теорема 2.15):

$$(\mathcal{F}I_+^\alpha f)(\omega) = \frac{1}{(i\omega)^\alpha}\,(\mathcal{F}f)(\omega),$$

где $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ и $f(t) \in L_1(\mathbb{R})$ или $1 \leqslant p < 1/\operatorname{Re}\alpha$ и $f(t) \in L_p(\mathbb{R})$.

Используя дробный интеграл Лиувилля и дробно-степенной закон (5) для $\widetilde{\chi}(\omega)$ в частотной области, получаем

$$\mathbf{P}(t,r) = \varepsilon_0\chi_\alpha(I_+^\alpha\mathbf{E})(t,r), \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{7}$$

Это уравнение показывает, что плотность поляризации $\mathbf{P}(t,r)$ для области высоких частот пропорциональна дробному интегралу Лиувилля от электрического поля $\mathbf{E}(t,r)$.

Рассмотрим уравнения (2) и (4). Для области частот $\omega \ll \omega_p$ универсальный дробно-степенной закон (2) может быть представлен в виде

$$\widetilde{\chi}(\omega) = \widetilde{\chi}(0) - \chi_\beta(i\omega)^\beta, \qquad 0 < \beta < 1, \tag{8}$$

с некоторыми положительными константами χ_β, $\widetilde{\chi}(0)$, $\beta = m$. Несложно доказать, что для (8) справедливо равенство (4).

Отметим, что преобразование Фурье дробной производной Лиувилля

$$(D_+^\beta f)(t) = \frac{\partial^k}{\partial t^k}\,(I_+^{k-\beta}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(k-\beta)}\,\frac{\partial^k}{\partial t^k}\int_{-\infty}^{t}\frac{f(t')\,dt'}{(t-t')^{\beta-k+1}},$$

где $k-1 < \beta < k$, задается следующей формулой (см. [6], теорема 7.1 и [14], теорема 2.15):

$$(\mathcal{F}D_+^\beta f)(\omega) = (i\omega)^\beta(\mathcal{F}f)(\omega),$$

где $0 < \operatorname{Re}\beta < 1$ и $f(t) \in L_1(\mathbb{R})$ или $1 \leqslant p < 1/\operatorname{Re}\beta$ и $f(t) \in L_p(\mathbb{R})$.

Используя определение дробной производной Лиувилля и дробно-степенной закон (8), плотность поляризации (6) можно задать в виде

$$\mathbf{P}(t,r) = \varepsilon_0 \widetilde{\chi}(0)\,\mathbf{E}(t,r) - \varepsilon_0 \chi_\beta (D^\beta_+\,\mathbf{E})(t,r), \quad 0<\beta<1. \tag{9}$$

Это соотношение показывает, как плотность поляризации $\mathbf{P}(t,r)$ в области низких частот определяется дробной производной Лиувилля от электрического поля $\mathbf{E}(t,r)$.

Соотношения (7) и (9) могут рассматриваться как уравнения универсальных законов. Эти уравнения, содержащие интегрирования и дифференцирования нецелых порядков, позволяют получить дробные волновые уравнения для электрического и магнитного полей.

3. УРАВНЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

В этом разделе мы получим дробное дифференциальное уравнение для электромагнитных полей в диэлектрических средах. Используя уравнения Максвелла, имеем

$$\varepsilon_0 \, \frac{\partial^2 \mathbf{E}(t,r)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{P}(t,r)}{\partial t^2} + \frac{1}{\mu}\,(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}) + \frac{\partial \mathbf{j}(t,r)}{\partial t} = 0. \tag{10}$$

При $\omega \gg \omega_p$ плотность поляризации $\mathbf{P}(t,r)$ связана с полем $\mathbf{E}(t,r)$ с помощью уравнения (7). Подставляя соотношение (7) в уравнение (10), получаем дробное дифференциальное уравнение для напряженности электрического поля

$$\frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 \mathbf{E}(t,r)}{\partial t^2} + \frac{\chi_\alpha}{v^2}\,(D^{2-\alpha}_+ \mathbf{E})(t,r) + (\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}) = -\mu\,\frac{\partial \mathbf{j}(t,r)}{\partial t}\,, \tag{11}$$

где $0<\alpha<1$, $v^2 = 1/(\varepsilon_0 \mu)$. Заметим, что $\operatorname{div}\mathbf{E} \neq 0$ для $\rho(t,r)=0$.

В области частот $\omega \ll \omega_p$ функции $\mathbf{P}(t,r)$ и $\mathbf{E}(t,r)$ связаны соотношением (9). В этом случае уравнение (10) принимает вид

$$\frac{1}{v_\beta^2}\,\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{a_\beta}{v_\beta^2}\,(D^{2+\beta}_+ \mathbf{E}) + (\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}) = -\mu\,\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}\,, \qquad 0<\beta<1, \tag{12}$$

где

$$v_\beta^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu [1+\widetilde{\chi}(0)]}\,, \qquad a_\beta = \frac{\chi_\beta}{1+\widetilde{\chi}(0)}\,.$$

Уравнения (11), (12) описывают изменение напряженности электрического поля в диэлектрических средах. Они являются дробными дифференциальными уравнениями [14], содержащими производные порядка $2-\alpha$ и $2+\beta$.

Используя уравнения Максвелла, получаем уравнение для индукции магнитного поля

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}(t,r)}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu}\,\nabla^2 \mathbf{B}(t,r) + \frac{1}{\varepsilon_0}\,\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{P}(t,r) + \frac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{rot}\mathbf{j}(t,r). \tag{13}$$

В экспериментах поле $\mathbf{B}(t,r)$ может реализовываться как $\mathbf{B}(t,r)=0$ для $t \leqslant 0$ и $\mathbf{B}(t,r) \neq 0$ для $t>0$. При $\omega \gg \omega_p$ плотность поляризации $\mathbf{P}(t,r)$ связана с полем $\mathbf{E}(t,r)$ с помощью уравнения (7), что приводит к дробному дифференциальному уравнению для индукции магнитного поля вида

$$\frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2\mathbf{B}(t,r)}{\partial t^2}+\frac{\chi_\alpha}{v^2}\,({}_0D_t^{2-\alpha}\mathbf{B})(t,r)-\nabla^2\mathbf{B}(t,r)=\mu\,\mathrm{rot}\,\mathbf{j}(t,r), \tag{14}$$

где $0<\alpha<1$, $v^2=1/(\varepsilon_0\mu)$, ${}_0D_t^{2-\alpha}$ – дробная производная Римана–Лиувилля [14] на полуоси $[0,\infty)$ такая, что

$$({}_0D_t^{2-\alpha}f)(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t\frac{f(t')\,dt'}{(t-t')^{1-\alpha}},\qquad 0<\alpha<1.$$

При $\omega\ll\omega_p$ получаем уравнение

$$\frac{1}{v_\beta^2}\,\frac{\partial^2\mathbf{B}(t,r)}{\partial t^2}-\frac{a_\beta}{v_\beta^2}\,({}_0D_t^{2+\beta}\mathbf{B})(t,r)-\nabla^2\mathbf{B}(t,r)=\mu\,\mathrm{rot}\,\mathbf{j}(t,r), \tag{15}$$

где $0<\beta<1$ и

$$v_\beta^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu[1+\widetilde{\chi}(0)]}\,,\qquad a_\beta=\frac{\chi_\beta}{1+\widetilde{\chi}(0)}\,.$$

Уравнения (14), (15) являются дробными дифференциальными уравнениями, которые описывают магнитное поле в диэлектрических средах, демонстрирующих степенной закон релаксации. Они могут быть записаны в обобщенной форме. Такое общее дробное дифференциальное уравнение для индукции магнитного поля имеет вид

$$({}_0D_t^{\alpha}\mathbf{B})(t,r)-\lambda_1({}_0D_t^{\beta}\mathbf{B})(t,r)-\lambda_2\nabla^2\mathbf{B}(t,r)=\mathbf{f}(t,r), \tag{16}$$

где $1\leqslant\beta<\alpha<3$. Здесь ротор плотности электрического тока свободных зарядов рассматривается как внешний источник: $\mathbf{f}(t,r)=\mu\lambda_2\,\mathrm{rot}\,\mathbf{j}(t,r)$. Уравнение (16) дает соотношение (14) для $\alpha=2$, $1<\beta<2$ и $\lambda_1=-\chi_\alpha$, $\lambda_2=v^2=1/(\varepsilon_0\mu)$. Уравнение (15) можно записать в форме (16) при $2<\alpha<3$, $\beta=2$ и

$$\lambda_1=\frac{1}{a_\beta}=\frac{1+\widetilde{\chi}(0)}{\chi_\beta}\,,\qquad \lambda_2=-\frac{v_\beta^2}{a_\beta}=\frac{-1}{\varepsilon_0\mu\chi_\beta}\,.$$

Точное решение уравнения (16) может быть записано в терминах функции Райта (см. [14], теорема 5.5). Заметим, что функции Райта могут быть представлены как производные от функции Миттаг-Леффлёра $E_{\alpha,\beta}[z]$ (см. [14]). Решения уравнения (16) описывают дробно-степенное затухание магнитного поля в диэлектрических средах. Важным свойством эволюции, описываемой дробным дифференциальным уравнением, является существование дробно-степенных асимптотик для их решений.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе показано, что электромагнитные поля и волны для широкого класса диэлектрических сред описываются дробными дифференциальными уравнениями с производными по времени порядка $2-\alpha$ и $2+\beta$, где $0<\alpha<1$ и $0<\beta<1$. Параметры $\alpha=1-n$ и $\beta=m$ определяются показателями n и m, фигурирующими в экспериментально измеримых частотных зависимостях диэлектрической восприимчивости, называемых законами универсального ответа. Важным свойством динамики электромагнитного поля в диэлектриках, описываемого дробными дифференциальными уравнениями, является существование дробно-степенных хвостов у решений этих уравнений. Предлагаемые дробные дифференциальные уравнения для универсальных электромагнитных волн в диэлектрике являются общими (универсальными) для широкого класса сред независимо от их физической структуры, химического состава и природы поляризации (дипольная, электронная или ионная).

Отметим, что дифференциальные уравнения с производными нецелого порядка, предложенные для описания электромагнитного поля в диэлектрических средах, могут решаться численно. Например, схема дискретизации Грюнвальда–Летникова [6] применяется для численного моделирования электромагнитного поля в диэлектриках, описываемых дробными дифференциальными уравнениями. При малых отклонениях величин α или β от целых значений можно использовать ε-разложение [15] по малому параметру $\varepsilon = \alpha$ или $\varepsilon = 1 - \beta$. Следует отметить, что физическая интерпретация дробных интегралов и производных может быть связана с эффектами памяти или фрактальными свойствами сред (см., например, [16], [17]).

Список литературы

[1] P. Debye, *Physik. Zs.*, **13** (1912), 97–100.

[2] A. K. Jonscher, *Universal Relaxation Law*, Chelsea Dielectrics Press, London, 1996.

[3] A. K. Jonscher, *J. Physics D*, **32**:14 (1999), R57–R70.

[4] T. V. Ramakrishnan, M. R. Lakshmi (eds.), *Non-Debye Relaxation in Condensed Matter*, World Scientific, Singapore, 1987.

[5] A. K. Jonscher, *Nature*, **267**:5613 (1977), 673–679; *Philos. Magazine B*, **38**:6 (1978), 587–601.

[6] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Марычев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987.

[7] G. M. Zaslavsky, *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*, Oxford Univ. Press, Oxsford, 2005.

[8] A. Carpinteri, F. Mainardi, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, CISM Courses and Lectures, **378**, Springer, Wien, 1997.

[9] R. Hilfer (ed.), *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.

[10] Р. Р. Нигматуллин, Я. Е. Рябов, *ФТТ*, **39**:1 (1997), 101–105.

[11] V. V. Novikov, V. P. Privalko, *Phys. Rev. E*, **64**:3 (2001), 031504.

[12] Y. Yilmaz, A. Gelir, F. Salehli, R. R. Nigmatullin, A. A. Arbuzov, *J. Chem. Phys.*, **125**:23 (2006), 234705.

[13] R. R. Nigmatullin, A. A. Arbuzov, F. Salehli, A. Giz, I. Bayrak, H. Catalgil-Giz, *Physica B*, **388**:1–2 (2007), 418–434.

[14] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, North-Holland Math. Stud., **204**, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[15] V. E. Tarasov, G. M. Zaslavsky, *Physica A*, **368**:2 (2006), 399–415.

[16] Р. Р. Нигматуллин, *ТМФ*, **90**:3 (1992), 354–368.

[17] А. А. Станиславский, *ТМФ*, **138**:3 (2004), 491–507.

Поступила в редакцию 18.12.2007,
после доработки 24.06.2008