

# Нейросетевое моделирование оптических солитонов, описываемых обобщенными нелинейными уравнениями Шредингера

Сбоев Александр,  
Молошников Иван, Завертяев Савелий, Кувакин Михаил  
НИЯУ МИФИ, НИЦ Курчатовский институт  
sag111@mail.ru

DLCP 2024

Численное моделирование распространения импульсов в нелинейной среде с использованием нейросетевого метода PINN для оптических солитонных задач обобщенного нелинейного уравнением Шредингера (ОНУШ) в частных производных.

- Показана применимость PINN для решения уравнений 2 и 4 порядков, валидация на известном точном решении;
- Исследованы алгоритмы балансировки loss функции;
- Экспериментально обосновано использование законов сохранения для контроля достоверности решения, в отсутствие точного решения;
- Исследована устойчивость солитонных решений при учёте возмущений:
  - взаимодействие двух солитонов на ОНУШ второго порядка;
  - взаимодействие солитона и Гауссовой функции на ОНУШ второго и четвёртого порядков;

# Краевая задача

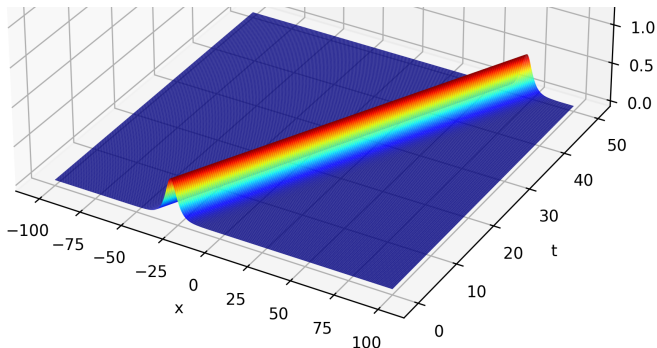
$$q = q(x, t) = u(x, t) + iv(x, t)$$

$$x \in [x_L, x_R], t \in [0, t_{max}],$$

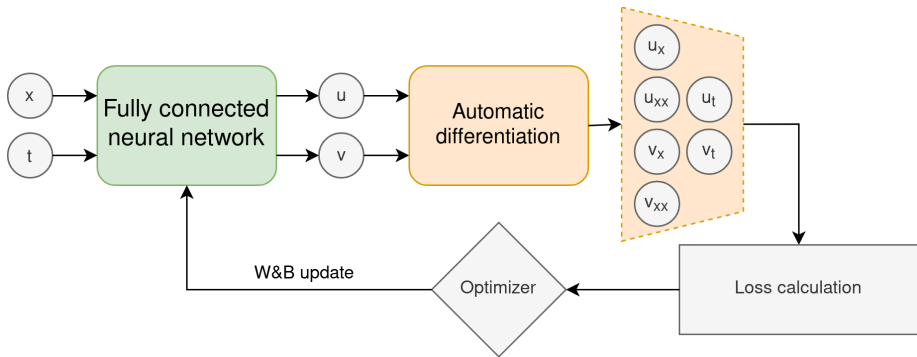
$$iq_t + q_{xx} + |q|^2 q(1 - \alpha|q|^2 + \beta|q|^4) = 0, \quad (1)$$

$$q(x, 0) = q_0(x),$$

$$q(x_L, t) = q(x_R, t) = 0$$



# Physics-informed Neural Network, PINN



$$Loss = MSE_{ic} + MSE_{bc} + MSE_{eq}$$

# Балансировка компонентов loss функции

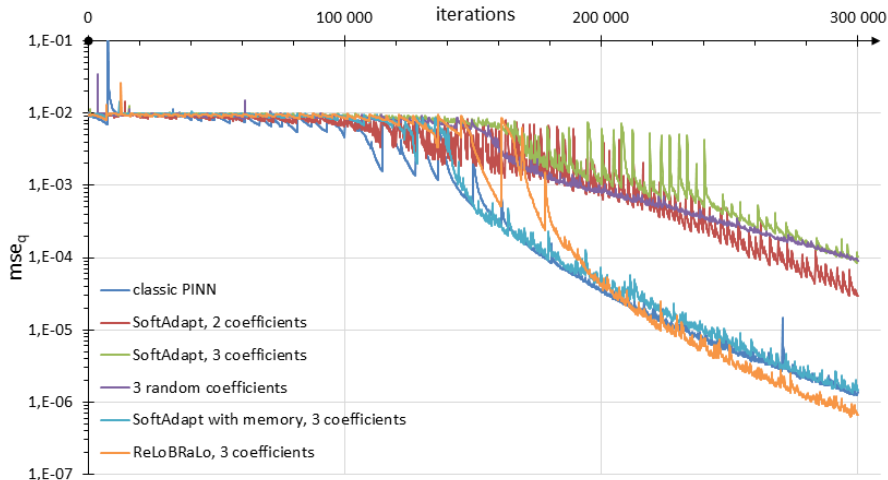


Рис.: уменьшение  $MSE_q$  в процессе обучения

# Что даёт сегментация по времени $t$

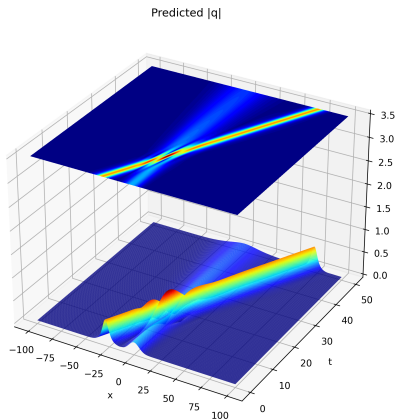
n segm	n neur	Res	$Err I_1$	$Err I_2$	$Rel_h$	время
1	64	0.00008	1.7e-02	1.8e-02	8.3e-04	52.5
<b>5</b>	<b>32</b>	0.00011	<b>9.1e-03</b>	<b>1.5e-02</b>	9.2e-04	57.6
1	32	0.00017	6.3e-02	7.5e-02	1.7e-03	34.3

**Таблица:** Сравнение запусков с сегментацией и без, время указано в минутах,  $Lw1$  и  $Lw2$  в процентах, Res - абсолютные значения невязки,  $Rel_h$  - относительная ошибка при сравнении с аналитическим решением.

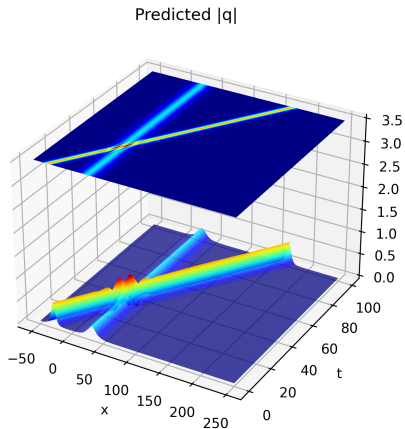
$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + v^2) dx$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (q^* q_x - q_x^* q) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (uv_x - vu_x) dx$$

# Результаты для ОНУШ 2 порядок



(a) Солитон и Гауссова функция



(b) Солитон и солитон

# Результаты для ОНУШ 4 порядок

$$iq_t + ia_1q_x + a_2q_{xx} + ia_3q_{xxx} + a_4q_{xxxx} - \sum_{j=1}^4 b_jq|q|^{2j} = 0 \quad (\text{BVP4})$$

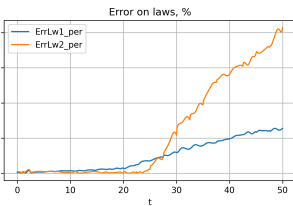
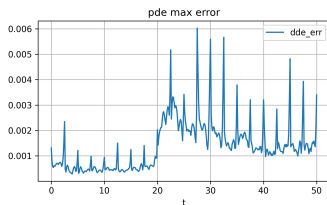
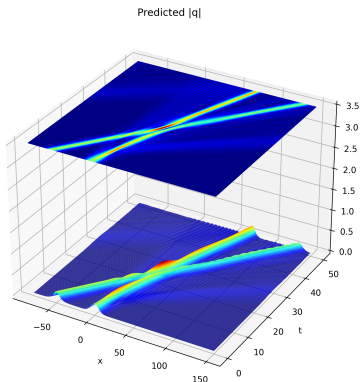


Рис.: Солитон и Гауссова функция



Показана применимость нейросетевого метода PINN для решения ОНУШ 2 и высокого 4 порядков. С помощью PINN получены численные решения для наблюдения некоторых эффектов взаимодействия оптических солитонов и их устойчивости. Показано, что методы балансировки loss функции не дают значимого прироста точности.

## Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований грант № 23-41-00070  
<https://rscf.ru/project/23-41-00070/> Работа была выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт»,  
<http://ckp.nrcki.ru/>.

# Результаты для ОНУШ 4 порядок

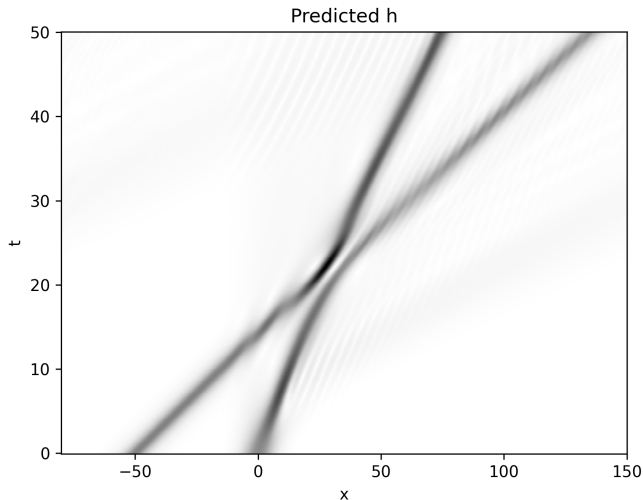


Рис.: Солитон и Гауссова функция (4 порядок)

# Результаты для ОНУШ 2 порядок

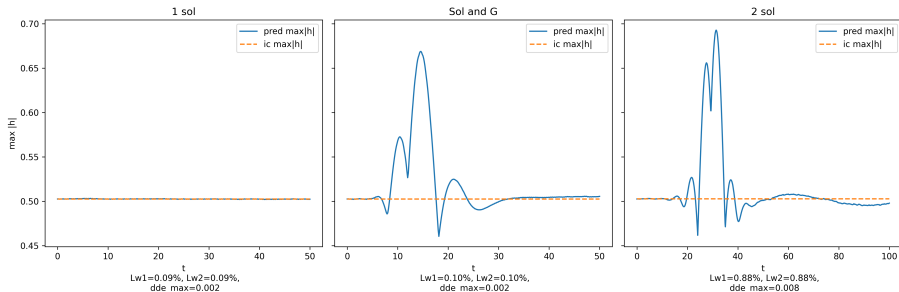


Рис.: Максимальное значение функции от времени

$$q = q(x, t) = u(x, t) + iv(x, t)$$

$$x \in [x_L, x_R], t \in [0, t_{max}],$$

$$iq_t + q_{xx} + |q|^2 q(1 - \alpha|q|^2 + \beta|q|^4) = 0, \quad (1)$$

$$q(x, 0) = q_0(x),$$

$$q(x_L, t) = q(x_R, t) = 0$$

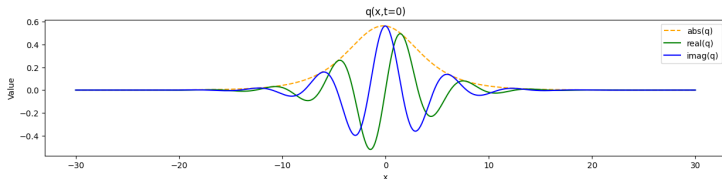


Рис.:  $q(x, t) = y(x - C_0 t) e^{i(kx - \omega t)}$

# Результаты для ОНУШ 4 порядок

$$iq_t + ia_1q_x + a_2q_{xx} + ia_3q_{xxx} + a_4q_{xxxx} - \sum_{j=1}^4 b_jq|q|^{2j} = 0 \quad (\text{BVP4})$$

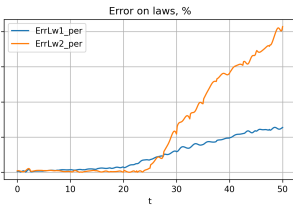
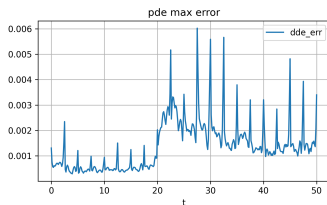
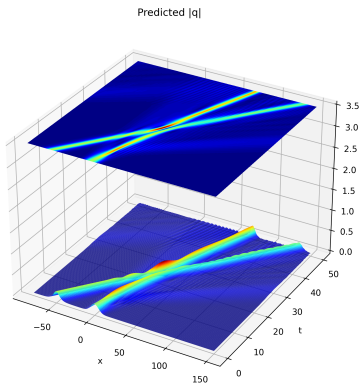
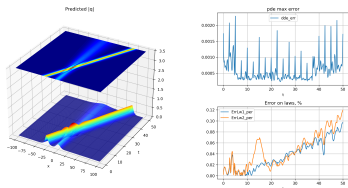
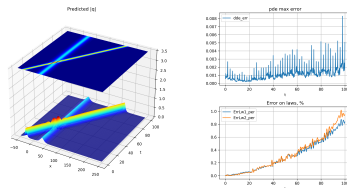


Рис.: Солитон и Гауссова функция

# Результаты для ОНУШ 2 порядок



(a) Солитон и Гауссова функция



(b) Солитон и солитон