

О подготовке входных данных для спайковых нейронных сетей

В.А. Ильин^{1,2,3}, М.Ю. Христиненко¹

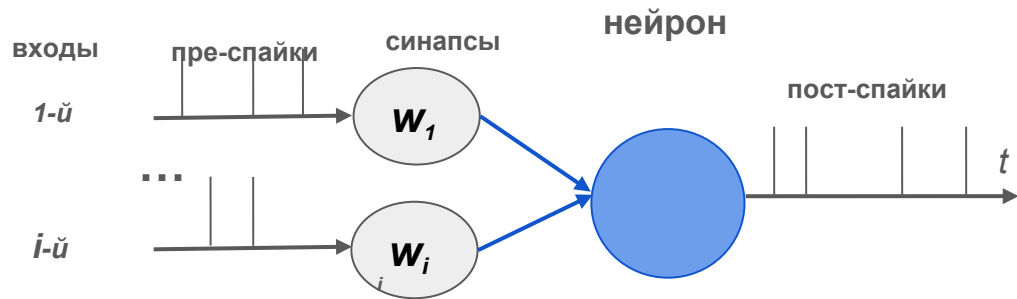
¹ НИЦ «Курчатовский институт», Москва

² НИВЦ МГУ, Москва

³ ИТМО, Санкт-Петербург

Спайковая нейронная сеть — динамическая система

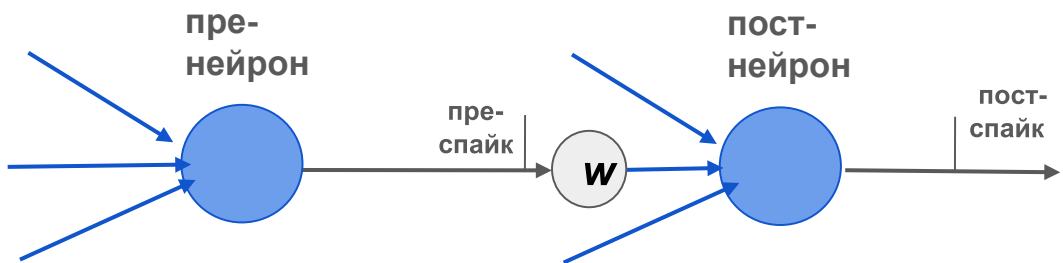
Спайковый нейрон



ВРЕМЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ $O(1ms)$:

- время прихода спайка на нейрон
- период релаксации нейрона
- рефракторное время нейрона

STDP (Spike Timing Dependent Plasticity)

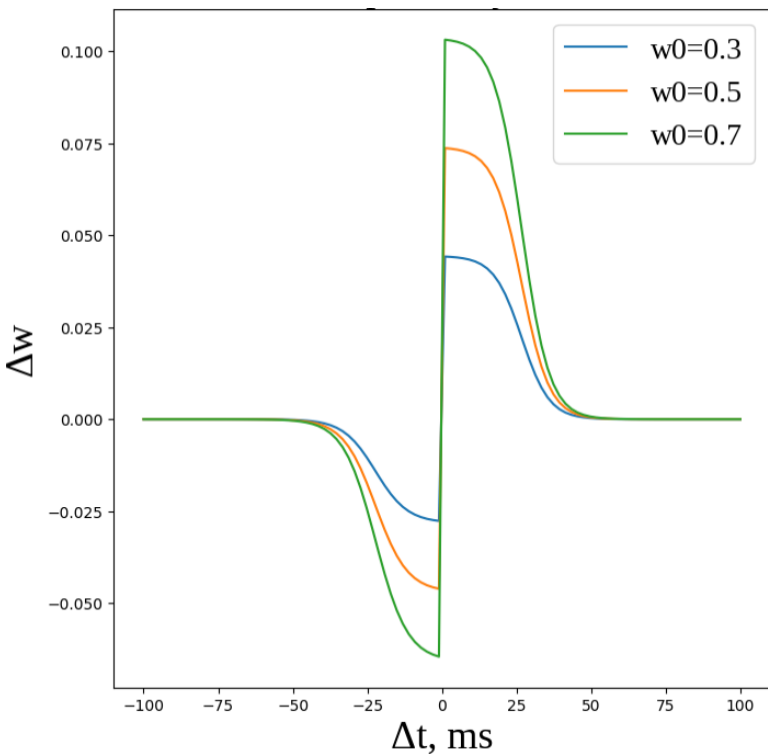


ВРЕМЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ :

- пост-нейрон: времена прихода и испускания спайков $t_{\text{пре}}$ и $t_{\text{пост}}$
- характерный временной параметр изменения синаптического веса W - $O(25ms)$

если $t_{\text{пост}} - t_{\text{пре}} > 0$, то вес W увеличивается; если $t_{\text{пост}} - t_{\text{пре}} < 0$, то W уменьшается

STDP – spike timing dependence placticity



$$\Delta w(\Delta t) = \begin{cases} A^+ \cdot w \cdot \left[1 + \tanh\left(-\frac{\Delta t - \mu_+}{\tau_+}\right) \right] & \text{при } \Delta t > 0; \\ A^- \cdot w \cdot \left[1 + \tanh\left(\frac{\Delta t - \mu_-}{\tau_-}\right) \right] & \text{при } \Delta t < 0; \end{cases}$$

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \quad \Delta t = t_{post} - t_{pre}$$

$$A^+ = 0.074, A^- = -0.047$$

$$\mu_+ = 26.7 \text{ мс}, \mu_- = -22.3 \text{ мс}$$

$$\tau_+ = 9.3 \text{ мс}, \tau_- = 10.8 \text{ мс}$$

Предподготовка входных данных

Искусственные нейронные сети - ориентированный граф (орграф):

Входные данные - численные вектора $x \in R^n$ которые подаются на входные нейроны. Возможна некоторая предподготовка $x \Rightarrow g(x)$, где $g(x): R^n \rightarrow R^n$ – монотонная функция.

Выход нейрона $wf(x)$, где w вес входящего ребра, а $f(x)$ – (дифференцируемая) функция активации нейрона. Этот выход далее подается на другие нейроны по выходящим ребрам.

Условие предподготовки: взаимно-однозначное соответствие между множествами входящих векторов и их образами после предподготовки $\{x\} \leftrightarrow \{g(x)\}$.

Спайковые нейронные сети - направленный граф, вершины это спайковые нейроны, направленные ребра это синаптические связи):

Входные данные - численные вектора $x \in R^n$, которые нужно подать на входные нейроны. Но спайковые нейроны могут принять только спайки. Поэтому входные вектора нужно преобразовать в *спайковый формат* $\{[s_i, \tau_i], i = 1, \dots, n\}$, где s_i - количество спайков для i -й компоненты входного вектора, а $\tau_i = (\tau_{i1}, \dots, \tau_{is_i})$ - времена их прихода на нейрон: $\{x\} \Rightarrow \{[s_i(x_i), \tau_i(x_i)] i = 1, \dots, n\}$.

Вопрос: как контролировать взаимную однозначность предобработки для спайковой сети:

$$\{x\} \leftrightarrow \{[s_i(x_i), \tau_i(x_i)] i = 1, \dots, n\}$$

Вопрос: как контролировать взаимную однозначность предобработки для спайковой сети: $\{x\} \longleftrightarrow \{[s_i(x_i), \tau_i(x_i)] , i = 1, \dots, n\}$?

Контролировать взаимную однозначность предобработки можно, например, вычисляя расстояние между парами входных векторов и между их спайковыми образами.

Множество входных векторов это точки в R^n и расстояние можно вычислять по евклидовой метрике. Но для спайковых образов входных векторов очевидного выбора метрики не просматривается.

Заметим, что, если нет взаимной однозначности, то должна быть хотя бы одна пара входных векторов, для которых их спайковые образы совпадают. В таком случае для этой пары входных векторов отклик спайковой нейронной сети будет одинаковым.

Можно тогда использовать сравнение откликов спайковой нейронной сети для каждой пары входных векторов — если на множестве откликов можно ввести метрику.

Под *откликом* нейронной сети будем понимать распределение весов на ребрах орграфа сети, которое устанавливается в результате подачи на сеть входного вектора в спайковом формате.

В статье [1] мы показали, что при подаче входного вектора на спайковую сеть резервуарного типа (орграф) отклик сети формируется в виде ориентированного подграфа (орграфа), который в математической литературе называется как **комплекс путей** [2]. На множестве комплексов путей можно естественным путем ввести евклидову метрику, представляя каждое ребро графе сети в виде орта евклидова пространства. Тогда каждый комплекс путей представим точкой в этом евклидовом пространстве.

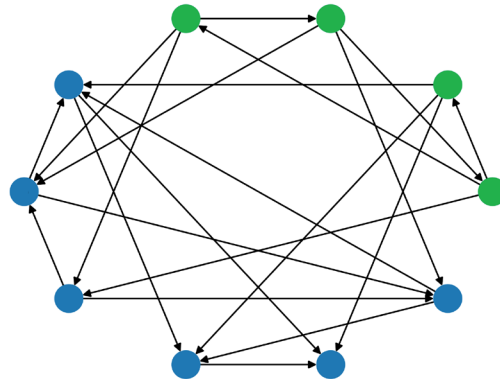
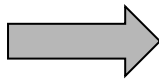
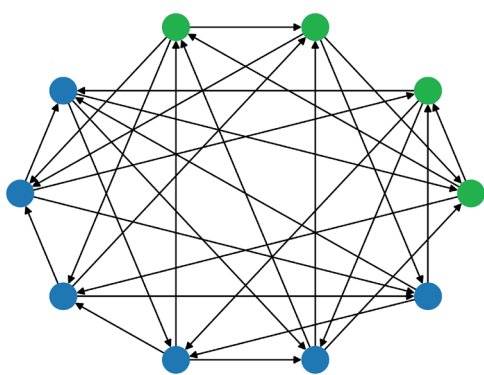
[1] V.A. Ilyin, M.Yu. Khistichenko *et al.* Moscow University Bulletin, 2024, v.79, p.S630. DOI: 10.3103/S0027134924702084

[2] A.A. Grigor'yan, *et al.*, J. Math. Sci., 2020, v.248, p.564. DOI 10.1007/s10958-020-04897-9

Спайковая нейронная сеть это **ориентированный граф (орграф)**:

нейроны - вершины орграфа,

синаптические связи — направленные ребра орграфа.



*Пример орграфа (сети) из 10
вершин (нейронов) и 30
направленных ребер (синапсов).*

Группа ребер с высокими весами (ор-
подграф), формирующийся через механизм
STDP - 10 вершин и 14 ребер. Результат
кратной подачи входного вектора в спайковом
формате.

Вычислительный эксперимент. [1]

Квадрат из 4-х бинарных пикселей; черный - **A**, белый - **B**.

Всего 16 четырехпиксельных входных бинарных векторов.

Входной вектор подается в нейронную сеть в окне размером 20ms:

- пиксели подаются на свой входной нейрон (номера 0,1,2,3);
- для **A** подаются 4 спайка в моменты времени 2, 7, 12 и 17 ms;
- для **B** подается 1 спайк в момент времени 10 ms.

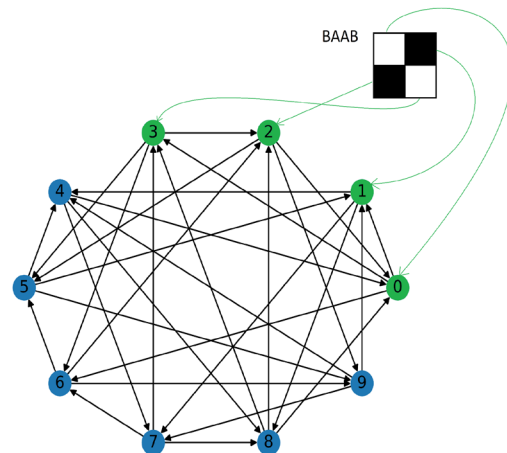
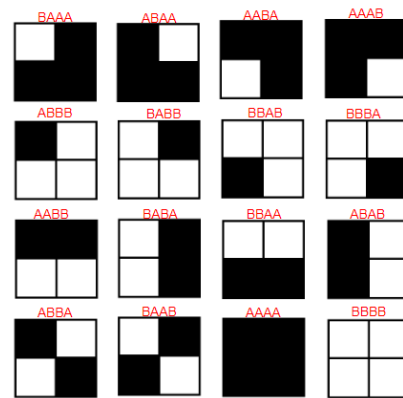
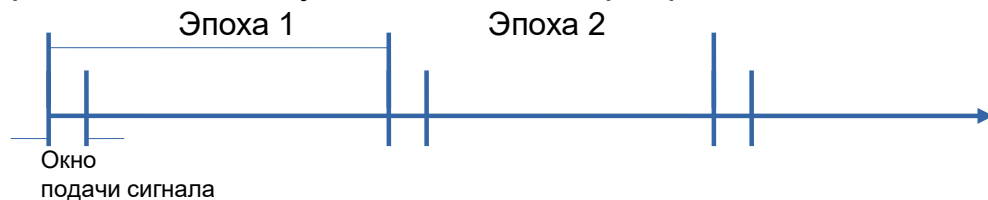
Архитектура орграфа сети:

- 10 вершин (нейронов), 30 ребер (синаптических связей);
- у каждой вершины 3 входящих ребра и 3 исходящих.

Веса ребер орграфа сети ограничены интервалом [0, 1].

Для каждого входного вектора:

- в начале все веса устанавливаются равными 0.5;
- для формирования комплекса путей достаточно 25 эпох подачи входного вектора. В комплекс путей включаются ребра с весами больше 0.5.



В [1] показано, что в такой модели преобразование входных (бинарных) векторов в спайковый формат является взаимно-однозначным отображением.

Вычислительный эксперимент 2 «Ирисы Фишера» (Iris flower data set)

Архитектура орграфа спайковой сети (резервуар):

10 вершин (нейронов), 40 ребер (синаптических связей), у каждой вершины по 4 входящих и исходящих ребер.

Веса ребер орграфа сети ограничены интервалом $[0, 1]$.

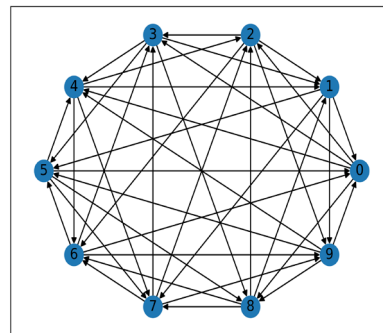
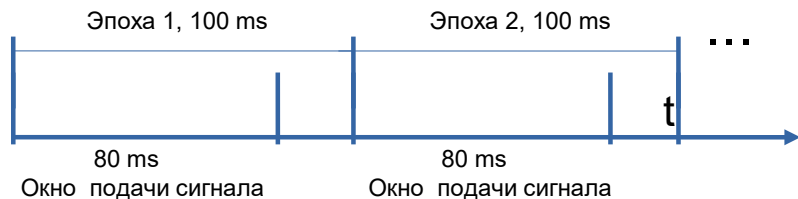
Вершины орграфа сети пронумерованы.

Ребра индексируются номерами пре- и пост-нейронов, (k_{pre}, k_{post})

Входящие нейроны (вершины) имеют номера 0, 1, 2 и 3. Подача входных векторов на входящие нейроны не рассматриваются, как синаптическая связь (это не ребра орграфа сети).

Подача входящих векторов на спайковую сеть:

- подача по эпохам длительностью 100 ms, количество эпох ~50;
- для каждой эпохи входной вектор подается в *окне подачи сигнала*, длительностью 80 ms.



Вычислительный эксперимент 2 «Ирисы Фишера» (Iris flower data set), cont.

Предобработка входных векторов

I. Каждая из 4-х компонент вектора подается, как один спайк в разные времена в окне подачи сигнала — численное значение компоненты вектора кодируется временем подачи **одного** спайка в окне подачи сигнала:

$$x_i \xrightarrow{\text{blue arrow}} [s_i(x_i) \rightarrow 1, \tau_i(x_i) \rightarrow \tau(x_i)], \tau(x_i) \in [0,80]ms \quad i = 1,2,3,4$$

II. Кодировка значений компонент вектора через времена подачи одиночных спайков, $\{\tau(x_i)\}$.

Функция $\tau(x_i)$ определяется по всему набору входных векторов (следующий слайд).

Пример ошибочного преобразования входного вектора в спайковый формат:

В наборе «Ирисы Фишера» есть вектора $[4.8, 3.0, 1.4, 0.1]$ и $[4.9, 3.1, 1.5, 0.2]$. Достаточно популярным выбором функции $\tau(x_i)$ для перевода численного значения компоненты входного вектора во время подачи спайка на входной нейрон в окне подачи сигнала является само численное значение масштабированное на размер окна: $\tau(x_i) = kx_i$, где k - коэффициент масштабирования. Можно выбрать $k = 10$. Тогда спайковый образ двух входных векторов будет, соответственно, $[48, 30, 14, 1] ms$ и $[49, 31, 15, 2] ms$. Вроде как это два различающиеся последовательности спайков Однако оба спайковых набора приведут к одному и тому же отклику спайковой сети, так как эти наборы отличаются сдвигом всех времен на одну и ту же величину $0.1 ms$. Для ждущей спайковой сети (кода в сети ничего не меняется) такие сдвиги не влияют на ее отклик.

Вычислительный эксперимент 2 «Ирисы Фишера» (Iris flower data set), cont.

Предобработка входных векторов

I. ...

II. **Кодировка значения компонент векторов через времена подачи одиночных спайков**,
Функция $\tau(x_i)$ определяется по всему набору входных векторов.

Для каждой компоненты векторов из набора «Ирисы Фишера» определим медианные значения и максимальные отклонения компонент векторов от медианных значений:

$$\text{for } i=1,2,3,4 \quad M_i = \text{median}(x_i^a, a = 1, \dots, 149), \quad D_i = \max_{a=1 \dots 149} |x_i^a - M_i|;$$

Тогда функция $\tau(x_i)$ определяется следующим образом:

$$\tau(x_i^a) = \tau_{\max} - \frac{|x_i^a - M_i|}{D_i} (\tau_{\max} - \tau_{\min}) \quad a = 1 \dots 149 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad \tau_{\min} = 0ms$$
$$\tau_{\max} = 80ms$$

Таким образом чем ближе численное значение компоненты вектора x_i к медианному значению M_i , тем раньше спайк придёт на входной нейрон.

Вычислительный эксперимент 2 «Ирисы Фишера» (Iris flower data set), cont.

Евклидовы метрики на множестве комплексов путей:

Для каждого входного вектора в спайковом формате (слайды 9 и 10), после кратной его подачи на спайковую нейронную сеть (слайд 8) в сети возникает бимодальное распределение весов с нулевыми весами около 0.5. Если оставить ребра с весами больше 0.5, то каждому входному вектору будет сопоставлен устойчивый ор-подграф (комплекс путей) [1].

На множестве комплексов путей можно ввести две евклидовы метрики [1]. :

- для каждого ребра орграфа сети (комплекса путей) сопоставим орт евклидова пространства. Для эксперимента «Ирисы Фишера» это пространство R^{40} ,

- каждому комплексу путей можно сопоставить точку на единичной сфере в R^{40} .
Первая метрика - расстояние между двумя комплексами путей определим, как евклидово расстояние между их образами в R^{40} ,

- вторая метрика: каждому ребру комплекса путей сопоставим точку в R^{40} в направлении соответствующего орта с радиальной длиной равной весу данного ребра.

В результате можно проверять взаимную однозначность между множеством входных численных векторов и их спайковыми образами — через вычисление расстояний между комплексами путей, соответствующих входным векторам в спайковом формате.

Вычислительный эксперимент 2 «Ирисы Фишера» (Iris flower data set), cont.

Результаты эксперимента:

Расстояния (по обоим метрикам) между всеми парами комплексов путей, соответствующих входным векторам в спайковом формате, больше нуля.

Это означает взаимную однозначность отображения множества входных численных векторов в спайковый формат (слайд 4):

$$\{x\} \longleftrightarrow \{s_i(x_i), \tau_i(x_i) \mid i = 1, \dots, n\}$$

Дополнительно:

1) Если расширить множество из 149 входных векторов «Ирисы Фишера» добавив 50 векторов с компонентами, случайно распределенными на отрезке $[0.1, 8.0]$, то результаты эксперимента 2 не изменятся.

2) Для множества входных векторов «Ирисы Фишера» в евклидовом пространстве R^{40} был выполнен эксперимент по классификации (по трем кластерам — видам цветков ириса) комплексов путей, полученных для 149 входных векторов. Для классификации использовались методы машинного обучения: метод опорных векторов, метод k-ближайших соседей и метод random forest. Лучшая точность получилась для метода random forest - 0.89.